## CARATTERIZZ matrici SDP

**Oss**: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, SDP. Allora la fatt LR di $A$ è t.c.

(I) $D = \mathrm{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn})\, S^T$

(II) $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0$ [$\Rightarrow \det A > 0$] (dim: ...)

**Oss**: $A$ simmetrica. Se $(S, D) = EG(A)$ [EG è def in $A$] e $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0$ allora $A$ è SDP.

(dim: ...)

---

**TEO** (caratt matrici SDP):

$A$ simmetrica. SDP $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{EG def in } A \text{ e } (S,D) = EG(A) \text{ con } d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0}$ (1)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\det A[k] > 0 \text{ per } k = 1, \dots, n}$ (2)

$\longleftarrow$ (*)

dim: SDP $\Leftrightarrow$ (1) segue dalle Oss precedenti;

SDP $\Rightarrow$ (2) da PROPRIETA' (I) lez precedente $\oplus$ (II) oss prec;

(2) $\Rightarrow$ SDP perchè (2) $\Rightarrow$ (1) ...

---

**Es**: $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3 \times 3}$ t.c. $A(x) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & x & x \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$

determ per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ risulta SDP

---

$\longleftarrow$ (*)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\exists L \text{ tr inf con } l_{kk} > 0,\ k = 1, \dots, n \text{ t.c. } A = LL^T}$ (3)

dim: SDP $\Rightarrow$ (3) da Oss (I) e poi $A = \underbrace{S\sqrt{\mathrm{diag}(d_{11} \cdots d_{nn})}}_{L}\sqrt{\dots}\ S^T$

(3) $\Rightarrow$ SDP dalla def ...

---

- COSA FARE se EG non def in A

**Es** (pivoting): $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{def: } P(i,j) \text{ è la matr di perm che scambia riga } i \text{ con riga } j}$

- $A^{(1)} = A$; $A^{(2)} = H_1 \underbrace{\boxed{P(1,2)}}_{P_1} A^{(1)}$; $A^{(3)} = H_2 \underbrace{\boxed{P(2,3)}}_{P_2} A^{(2)}$ è tr sup...

  ... quindi: $A^{(3)} = [H_2 P_2 H_1 P_1]\, A$

  ... ovvero: $A = [P_1^T H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1}]\, A^{(3)}$

  MA: [...] non è tr inf con 1 sulla diag! (*)

- $P \overset{\text{def}}{=} P_2 P_1$ allora: $P[\dots]$ è tr inf con 1 sulla diag ... (**)
- $\boxed{S = P[\dots],\ D = A^{(3)} \text{ è fatt LR di } PA}$
- $\boxed{A = P^T S D}$

  Es (per casa): verif (*) e (**)

- $(P, S, D) = EGP(A)$