CN # 25,26 / 6 novembre 2013 / C21

• Caso GENERALE

idea: fattorizzare A cioè (scrivere A come prodotto di) fattori SEMPLICI...

Es: (1) fattorizzazione LR $\quad S, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.

- S tr. inf con $s_{kk} = 1$ (invert!)
- D tr sup
- $SD = A$

$\boxed{\text{Oss: } A \text{ invert} \Leftrightarrow D \text{ invert}}$

(2) fattorizz QR $\quad U, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.

- U ortogonale (invertibile!)
- T tr sup
- $UT = A$

$\boxed{\text{Oss: } A \text{ invert} \Leftrightarrow T \text{ invert}}$

... poi (caso della fattorizzazione $A = MN$)

$Ax = b \sim MNx = b$ • cambio variabili: $Nx = c$ (invertibili)

- $Mc = b$ (caso semplice) $\longrightarrow$ ricavo c
- $Nx = c$ (caso semplice) $\longrightarrow$ ricavo x

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è fatt di A;

- decidere se LR o QR (o nessuna delle due...)
- risolvere il sist $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

Pb: assegnata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ determ fatt LR ...

Soluz: tentare usando $\boxed{\text{elim di Gauss}}$

... QR

Soluz: tentare usando $\boxed{\text{procedura di GRAM-SCHMIDT}}$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$; per determ fatt LR si utilizza la proc di ELIMINAZ di GAUSS:

1) $A^{(1)} = A$

2) si indica con r_k la riga k-esima della matrice...

$r'_1 = r_1$; $r'_2 = r_2 + \lambda_{21} r_1$ (λ_{21} t.c. $r'_{21} = 0$)

$r'_3 = r_3 + \lambda_{31} r_1$ (λ_{31} t.c. $r'_{31} = 0$)

ovvero: $A^{(2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H_1} A^{(1)}$

$\lambda_{21} = -1$, $\lambda_{31} = -1$

e $A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

3) $r'_1 = r_1$; $r'_2 = r_2$; $r'_3 = r_3 + \lambda_{32} r_2$ (λ_{32} t.c. $r'_{32} = 0$)

ovvero: $A^{(3)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{H_2} A^{(2)}$

$\lambda_{32} = -2$

e $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Oss:

- $A^{(3)}$ è tr sup (un candidato fatt destro di fatt LR)
- H_1, H_2 sono tr sup con 1 sulla diag ($\Rightarrow$ invertibili)
- $A^{(3)} = H_2 A^{(2)} = H_2 H_1 A \Rightarrow A = H_1^{-1} H_2^{-1} A^{(3)}$

e $H_1^{-1} H_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 \\ -\lambda_{31} & -\lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}$ è tr inf con 1 sulla diag

dunque: $\boxed{H_1^{-1} H_2^{-1},\ A^{(3)} \text{ è fatt LR di } A}$

Oss: i coeff $-\lambda_{ij}$ si chiamano MOLTIPLICATORI.