2 SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI

Pb: dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile, $b \in \mathbb{R}^n$
determinare $x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax^* = b$

Oss: A invertibile significa (propr equivalenti)

- $\exists!\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $AB = BA = I$ (matr identità, $B = A^{-1}$)
- $\det A \neq 0$
- $\ker A = \{0\}$
- $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
- colonne (righe) di A sono elem lin indip (q. di BASE) di $\mathbb{R}^n$
- $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $\exists!\ x^*$: $Ax^* = b$

- Casi SEMPLICI

(D) A diagonale ($a_{ij} = 0$ per $i \neq j$)

- invertibile ~ $a_{kk} \neq 0$, $k = 1, \dots, n$
- soluzione: $x_k = b_k / a_{kk}$, $k = 1, \dots, n$

(T) A triangolare ($a_{ij} = 0$ per $\begin{cases} i > j & \text{tr SUPERIORE} \\ i < j & \text{tr INFERIORE} \end{cases}$)

- invertibile ~ $a_{kk} \neq 0$, $k = 1, \dots, n$
- soluzione: TS) SOSTITUZIONE all'INDIETRO
  TI) SOSTITUZIONE in AVANTI (Es: descrivere procedura!)

```
x = SI(T, c)
  dati: T ∈ R^{n×n} tr sup invert, c ∈ R^n
  uscita: x ∈ R^n t.c. Tx = c
x_n = c_n / t_nn
per k = n-1, ..., 1 ripeti
  • s_k = c_k − (t_{k,k+1} x_{k+1} + ... + t_{kn} x_n);
  • x_k = s_k / t_kk
```

PROCEDURA (FUNZIONE) SOSTITUZIONE all'IND (op in $\mathbb{R}$)

(O) A ortogonale (ovvero − proprietà equivalenti:

- colonne (righe) sono BASE ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$, risp al p.s. canonico
- $A^T A = I$
- $A^{-1} = A^T$)

- invertibile sicuramente
- soluzione: $Ax = b \sim A^T A x = A^T b \sim \boxed{x = A^T b}$

(P) A di permutazione (le colonne [righe] di A sono una permutaz di quelle $e_1, \dots, e_n$ della matr identità; Es: I, J)

Oss: A di permutazione ...
- $\Rightarrow$ A ortogonale
- $v \in \mathbb{R}^n$, le comp di Av ...

- invertibile sicuramente
- soluzione: $x^* = A^T b$ (ottenuta permutando le comp. di b!)

Es: $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; determ P di perm t.c. $Pv = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$