1 ZERI di FUNZIONI REALI di UNA VARIABILE

Pb: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, det $\alpha\in[a,b]$ t.c. $f(\alpha)=0$

"ZERO di f"

• Metodo di bisezione

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont; $x_1,x_2\in\mathbb{R}$
se $g(x_1)\,g(x_2)<0 \Rightarrow \exists$ zero di g tra x_1 e x_2

idea: utilizz TEO esistenza zeri per ottenere una succes di INTERVALLI I_k, ciascuno contenente uno zero di f, t.c. $I_{k+1}\subset I_k$ e $\lim_{k\to\infty}$ mis $I_k = 0$.

descriz del m di bisez (OPERANDO in $\mathbb{R}$)

dati: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ t.c. $f(a)\,f(b)<0$

$a_0=a$; $b_0=b$, $I_0=[a_0,b_0]$, $x_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$;

per $k=1,2,\dots$ ripeti

se $f(x_{k-1})=0$ allora STOP altrimenti

- se $f(x_{k-1})\,f(b_{k-1})<0$ allora $a_k=x_{k-1}$, $b_k=b_{k-1}$;
- se $f(a_{k-1})\,f(x_{k-1})<0$ allora $a_k=a_{k-1}$, $b_k=x_{k-1}$;
- $I_k=[a_k,b_k]$, $x_k=\dfrac{a_k+b_k}{2}$

uscita: quando un opportuno CRITERIO D'ARRESTO è verificato: x_k.

Oss: mis $I_k = \dfrac{\text{mis } I_{k-1}}{2} = \dfrac{\text{mis } I_{k-2}}{2^2} = \dots = \dfrac{\text{mis } I_0}{2^k}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}$ mis $I_k = 0$

• SE f continua, ciascun I_k contiene uno zero e $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$ t.c. $f(\alpha)=0$.

Oss (criterio d'arresto ASSOLUTO):

• $\delta>0$ assegnato, criterio d'arresto: $\boxed{\text{mis } I_k<\delta}$

1) mis I_k è calcolabile: mis $I_k = b_k-a_k$

2) disug certamente verif dopo # finito iteraz

3) SE f continua:

- $\exists\,\alpha\in I_k$ t.c. $f(\alpha)=0$ (teo $\exists$ zeri...)
- $|x_k-\alpha|\le$ mis $I_k<\delta$

ovvero: si è otten un'appross di α (zero di f) con ERRORE ASSOLUTO inferiore a δ.

Es: dato $\delta>0$, determ k t.c. mis $I_k<\delta$
(ovvero: determ il numero di it da fare perché il cr d'arresto sia verificato)

(Sol. $k>\log_2 \text{mis } I_0 - \log_2\delta$)

Oss (criterio d'arresto RELATIVO):

$I_k\not\ni 0$ e, posto $m_k=\min\{|a_k|,|b_k|\}$, $\dfrac{\text{mis } I_k}{m_k}<\epsilon$

• $\epsilon>0$ assegnato, criterio d'arresto:

1) è calcolabile ...

2) se $I_0\not\ni 0$, disug certamente verif dopo # finito iteraz (mis $I_k\to 0$ e $m_k\ge m_0$)

3) SE f continua:

- $\exists\,\alpha\in I_k$ t.c. $f(\alpha)=0$
- $\left|\dfrac{x_k-\alpha}{\alpha}\right|\le\dfrac{\text{mis } I_k}{m_k}<\epsilon$

ovvero: x_k approssima α con ERRORE RELATIVO inf a ϵ.

Es (per casa): dato $\epsilon > 0$ e $I_0 \not\ni 0$, determ k t.c.

$$\frac{\text{mis } I_k}{m_k} < \epsilon \qquad \left(\underline{\text{Sol}}: \ k > \log_2 \text{mis } I_0 - \log_2 a_0 - \log_2 \epsilon \right)$$

Es (per casa): descrivere il comportamento del metodo di bisezione quando applicato alla funzione $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}}$ a partire da $I_0 = [0,2]$.

Oss: utilizz il calcolatore si ha:

- $a_0 = rd(a)$, $b_0 = rd(b)$ $\Rightarrow$ si cercano zeri in int <u>leggerm diverso</u> da $[a,b]$ ...
- la success dei punti medi x_k è sostituita dalla success $\xi_k = (a_k \oplus b_k) \oslash 2$ ...
- si usa $\varphi(\xi_k)$ invece di $f(\xi_k)$: <u>se</u> err rel < 1, ok, altrimenti ...
- criterio d'arresto ...