CN #54, 55 / 30 maggio 2013 / A11

<u>Es</u> (oscill armonico, vedi Lez del 20 maggio)

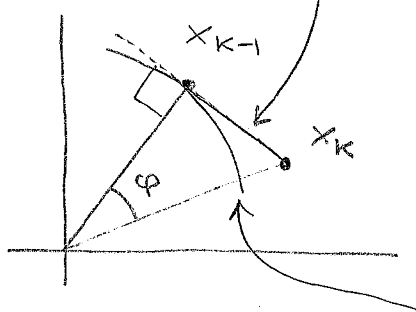
- Pb Cauchy: $\begin{cases} \ddot{x}(t) = -x(t) \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \qquad t \in [0, 4\pi]$

- Forma normale: $x_1(t) = x(t)$
  $x_2(t) = \dot{x}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Costruz geom per un passo del metodo di Eulero:

$$x_k = x_{k-1} + h_{k-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_{k-1}}_{\substack{x_{k-1} \text{ ruotato di} \\ \frac{\pi}{2} \text{ senso orario}}}$$

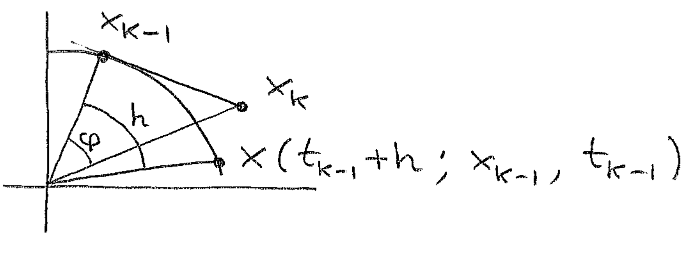


$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\| x_k - x_{k-1} \|}{\| x_{k-1} \|} = h_{k-1}$$

$$\Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} h_{k-1} \boxed{< h_{k-1}}$$

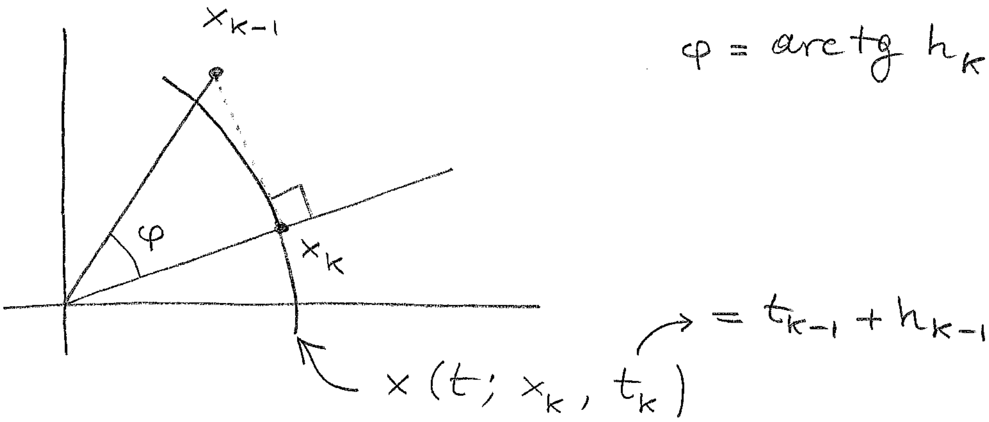
PIANO DELLE FASI

$\boxed{x(t; x_{k-1}, t_{k-1})}$



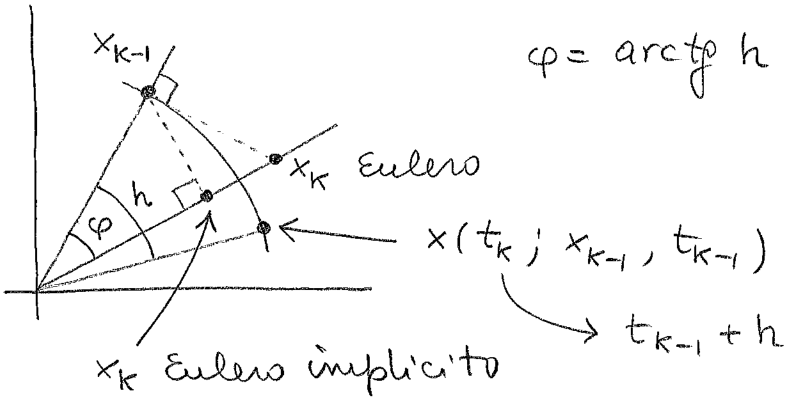
- Costruz geom per un passo del metodo di Eulero IMPLICITO:

$$x_k = x_{k-1} + h_{k-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$



$\varphi = \text{arctg}\, h_{k-1} \boxed{< h_{k-1}}$

PIANO DELLE FASI



$\varphi = \text{arctg}\, h$

$\Downarrow$

- Entrambe le soluz numeriche (con Eulero e con Eulero implicito) "restano indietro" rispetto alla soluz dell'eq. diff

$\boxed{\text{INOLTRE}}$

- la soluz numerica gen dal metodo di Eulero percorre una "spirale" in cui $\| x_k \| > \| x_{k-1} \|$;
- la soluz numerica gen dal metodo di Eulero implicito percorre una "spirale" in cui $\| x_k \| < \| x_{k-1} \|$.

VEDERE GRAFICI

- le componenti della soluz numerica sono oscillazioni di ampiezza
  - CRESCENTE nel caso di Eulero
  - DECRESCENTE nel caso di Eulero implicito

INFATTI

- PRECISAMENTE, dalle costruz geom segue che:

Eulero: $\| x_k \|^2 = \| x_{k-1} \|^2 + h_{k-1}^2 \| x_{k-1} \|^2$

$$\Rightarrow \| x_k \| = \underbrace{\sqrt{1+h_{k-1}^2}}_{>1,\ \forall h_{k-1}>0} \| x_{k-1} \|^2$$

Eulero implicito: $\| x_{k-1} \|^2 = \| x_k \|^2 + h_{k-1}^2 \| x_k \|^2$

$$\Rightarrow \| x_k \| = \frac{1}{\sqrt{1+h_{k-1}^2}} \| x_{k-1} \|^2 \qquad <1,\ \forall h_{k-1}>0$$

OSS (stabilità nel senso di Liapunov)

$\dot{x} = Ax$

$\downarrow$

$x = 0$ è conf di equilibrio

(unica SE A invertibile)

$x_k = B x_{k-1}$

$\downarrow$

$x = 0$ è conf di eq (pto unito!)

(unica SE $I - B$ invertibile)

TEO: $x = 0$ è conf di eq STABILE

$\Updownarrow$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A si ha:

p. reale di $\lambda < 0$

OPPURE

p. reale di $\lambda = 0$ E $m.a.(\lambda) = m.g.(\lambda)$

TEO: $x = 0$ è conf di eq. STABILE

$\Updownarrow$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di B si ha:

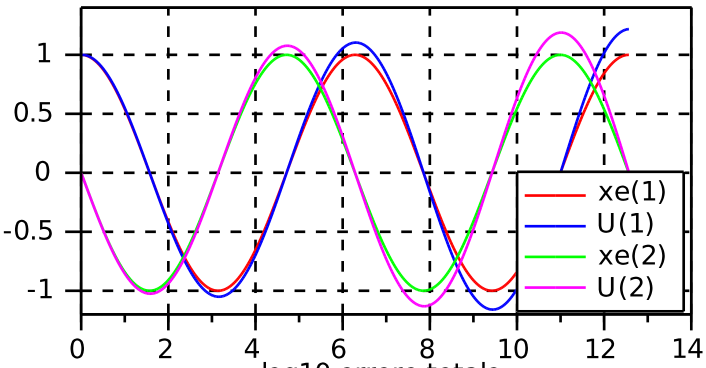
$|\lambda| < 1$

OPPURE

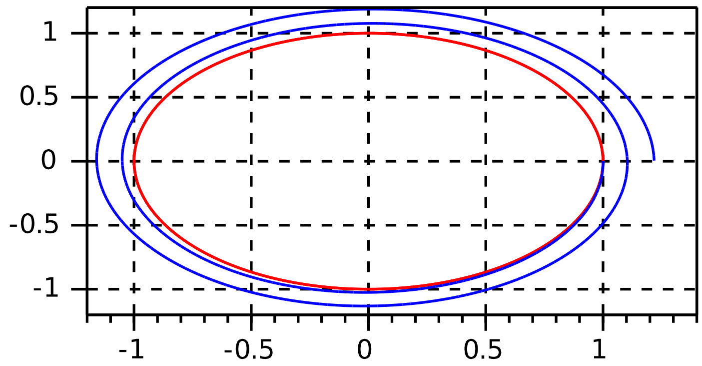
$|\lambda| = 1$ E $m.a.(\lambda) = m.g.(\lambda)$

condiz NEC & SUFF per STABILITA' ASINTOTICA (STAB ⊕ $\to 0$)

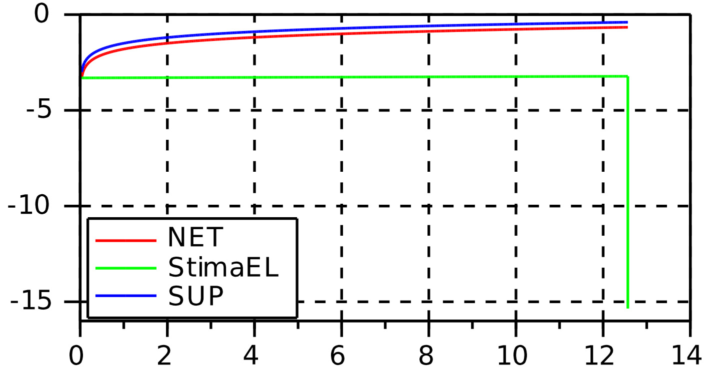
soluzione



piano delle fasi: traiettoria



log10 errore totale



Il passo risulta costante e pari a:

3.14159265359D-02

Problema: oscillatore armonico su [0 , 4 Pi]
Condizione iniziale: x(0) = 1 , dx/dt(0) = 0
Periodo esatto: 2 Pi = 6.283185307179586

EL_MAX = 1.00000000000D-03

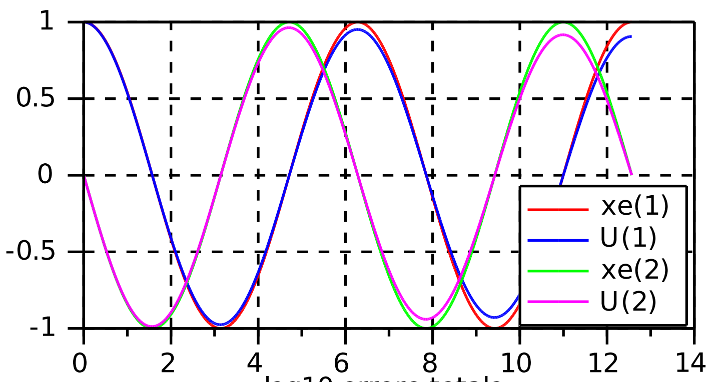
Procedura: LMV_eulero_pv

Errore totale massimo = 1.60945131671D-01

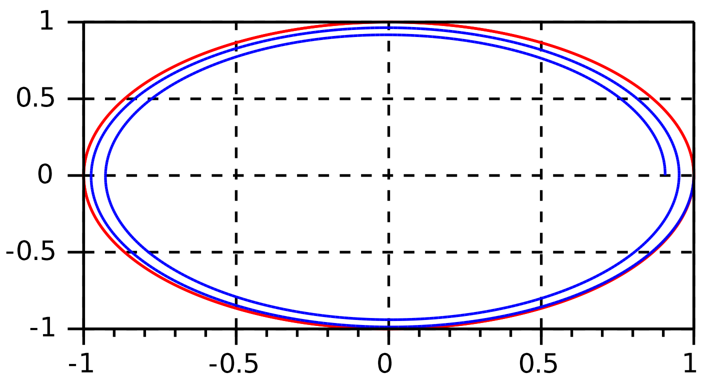
SUP(k) = EL_MAX + SUP(k-1)
[l'equazione controlla la propagazione di et(k)]

Numero passi = 401

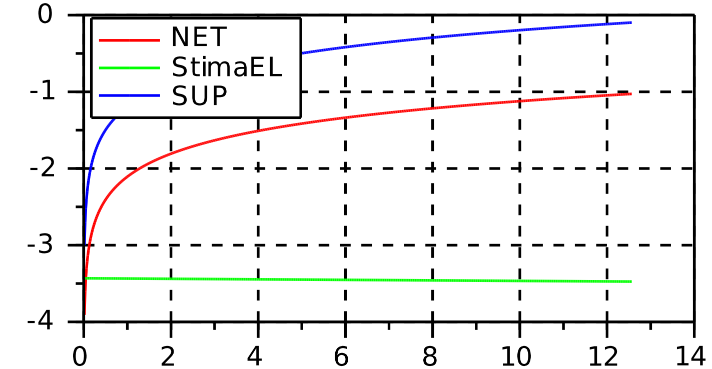
soluzione



piano delle fasi: traiettoria



log10 errore totale



Il passo risulta costante e pari a:

1.57079632679D-02

Problema: oscillatore armonico su [0 , 4 Pi]
Condizione iniziale: x(0) = 1 , dx/dt(0) = 0
Periodo esatto: 2 Pi = 6.283185307179586

Procedura: LMV_eulero_imp_pv

SUP(k) = EL_MAX + SUP(k-1)
[l'equazione controlla la propagazione di et(k)]

EL_MAX = 1.00000000000D-03

Errore totale massimo = 9.39713979303D-02

Numero passi = 800