CN # 51, 52 / 23 maggio 2013 / A11

Es (eq.ne stiff)

Pb: $\begin{cases} \dot{x} = -100x + 10 \\ x(0) = 1 \end{cases}$, $t \in [0,2]$

- $x(t) = \frac{1}{10} + \left(x_0 - \frac{1}{10}\right) e^{-100(t-t_0)} \equiv x(t; x_0, t_0)$
- $\left| x(t; A, \tau) - x(t; B, \tau) \right| \leq |A-B| \, e^{-100(t-\tau)}$

$\Rightarrow \boxed{ET_k < EL_k + e^{-100 h_{k-1}} ET_{k-1}}$

Oss: Per EL_MAX $= 10^{-2}$...

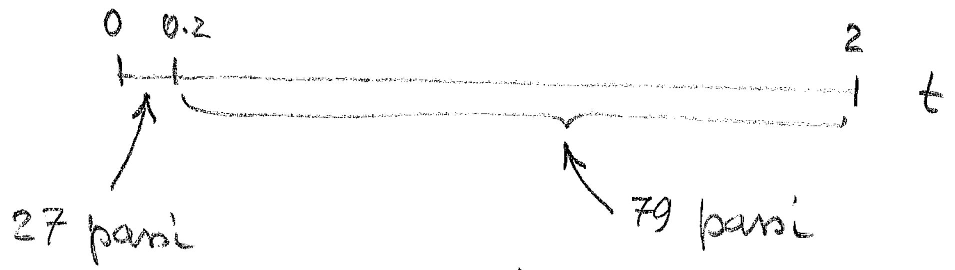
(1) xe − U ha andamento "OSCILLANTE":
xe è monotona decrescente, U no

ANDAMENTO di U QUALITATIVAMENTE differente da quello di xe!

(2) $ET_k \leq 2.2 \cdot 10^{-2}$ ma $\log_{10} ET_k$ ha
ANDAMENTO IRREGOLARE;

③ Il passo oscilla IRREGOLARMENTE intorno al valore 0.02 ;

④ N = 106 di cui :



di valor medio = $2.3\ 10^{-2}$

Per EL_MAX = 10^{-6} ...

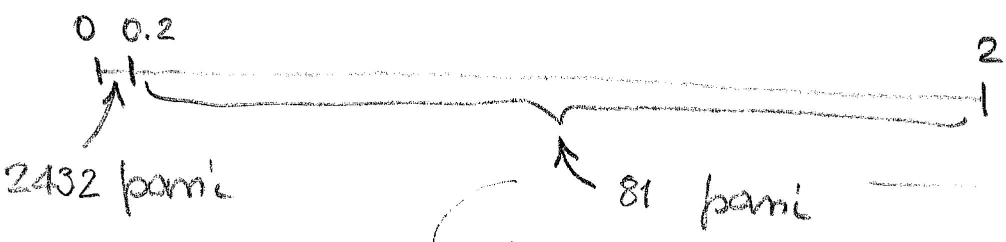
① xe_U ha ancora andam "OSCILLANTE"...

② $ET_k \le 1.8\ 10^{-4}$ (coerenti con...)

ma $\log_{10} ET_k$ ha ancora andam irreg...

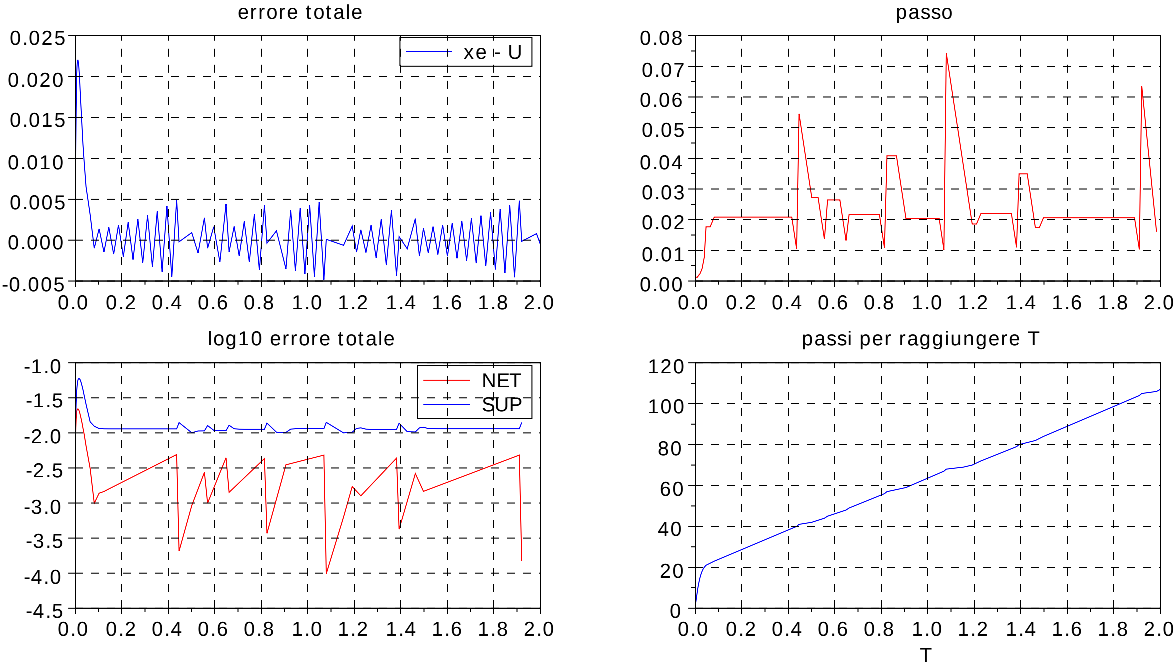
③ Il passo oscilla ancora irregolarm intorno al valore 0.02 ...

④ N = 2513 di cui :



di valor medio = $2.3\ 10^{-2}$

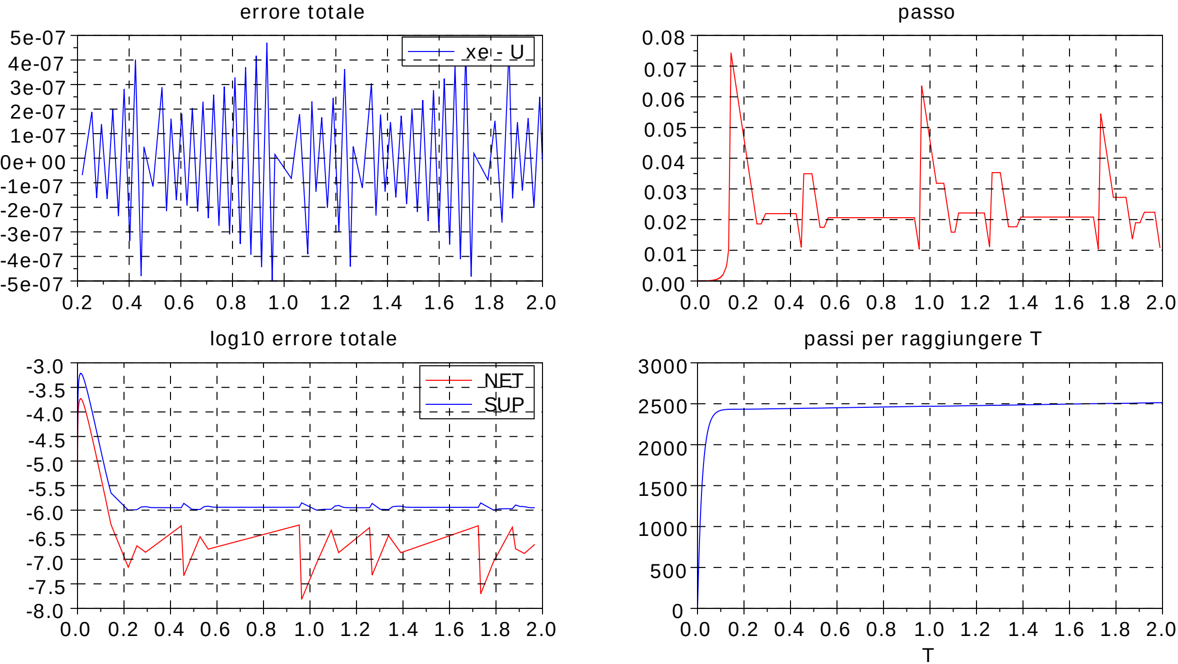
INDIPENDENTE da EL_MAX !



Problema: dx/dt = -100 x + 10 , x(0) = 1

Procedura: LMV_eulero_pv
SUP(k) = EL_MAX + SUP(k-1)*exp(-100*PASSO(k-1))
EL_MAX = 1.000D-02

Errore totale massimo = 2.205D-02
Numero passi = 106
di cui 27 per raggiungere T = 0.2
e 79 da T = 0.2 a T = 2
Passo:
minimo = 1.250D-03
medio = 1.889D-02
massimo = 7.436D-02



Problema: dx/dt = -100 x + 10 , x(0) = 1

Procedura: LMV_eulero_pv
SUP(k) = EL_MAX + SUP(k-1)*exp(-100*PASSO(k-1))
EL_MAX = 1.000D-06

Errore totale massimo = 1.863D-04
Numero passi = 2513
di cui 2432 per raggiungere T = 0.2
e 81 da T = 0.2 a T = 2
Passo:
minimo = 9.766D-06
medio = 7.919D-04
massimo = 7.436D-02

- Per $t_k \in [0.6, 0.9]$ si ha h costante di valore $\simeq 2.061 \cdot 10^{-2}$ e:

$$x_k = x_{k-1} + h\, F(t_{k-1}, x_{k-1})$$
$$= x_{k-1} + h\left(-100\, x_{k-1} + 10\right)$$

ovvero:

$$x_k - \frac{1}{10} = \left(x_{k-1} - \frac{1}{10}\right) - 100h\left(x_{k-1} - \frac{1}{10}\right)$$
$$= \underbrace{(1-100h)}_{\approx\, 1-2.061 \,=\, -1.061 \,<\, -1}\left(x_{k-1} - \frac{1}{10}\right)$$

$\Rightarrow$ la succes. $x_k - \frac{1}{10}$ ha segno alternante e modulo crescente!

"INSTABILE"

- $-1 < 1 - 100h < 1$

$\Leftrightarrow \quad -2 < -100h < 0$

$\Leftrightarrow \quad 0 < 100h < 2$

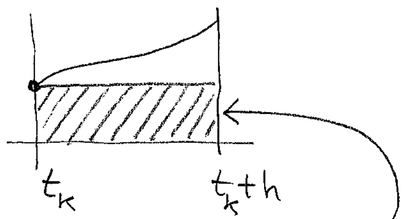
$\Leftrightarrow \quad \boxed{0 < h < 2 \cdot 10^{-2}} \quad \Leftrightarrow$ $x_k - \frac{1}{10}$ ha modulo decresc. ("STABILE")

Metodo di <u>EULERO IMPLICITO</u> :

- $x(t)$ soluzione $\left(\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \right)$

- $$x(t_k+h) - x(t_k) = \int_{t_k}^{t_k+h} \dot{x}(\theta)\, d\theta$$
$$= \int_{t_k}^{t_k+h} F(\theta, x(\theta))\, d\theta$$

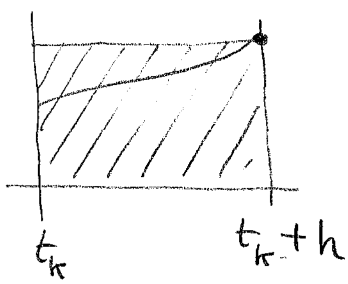
- Eulero ("esplicito"):



$$\int_{t_k}^{t_k+h} F(\theta, x(\theta))\, d\theta \approx h\, F(t_k, x(t_k))$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{k+1} = x_k + h\, F(t_k, x_k)}$$

- Eulero implicito:



$$\int_{t_k}^{t_k+h} F(\theta, x(\theta))\, d\theta \approx h\, F(t_k+h, x(t_k+h))$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{k+1} = x_k + h\, F(t_k+h, x_{k+1})}$$

Oss:

(1) dati x_k, h:

x_{k+1} è zero di...

$$\boxed{G(X) = X - h\,F(t_k+h, X) - x_k}$$

(2) E' un metodo di ORDINE 1 (come quello "esplicito"):

$$EL \sim Ch^2$$

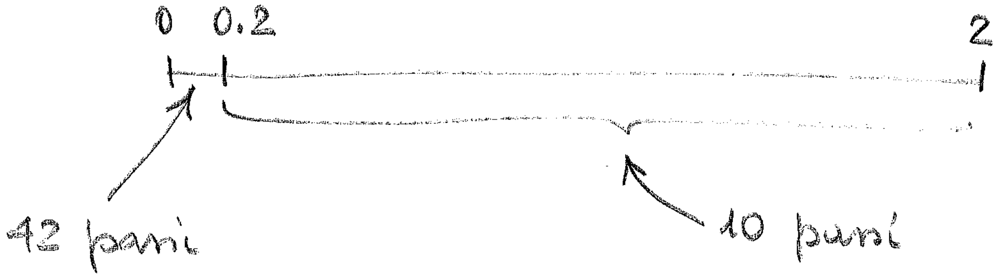
Oss: $EL\_MAX = 10^{-2}$

(1) xe-U ha andamento REGOLARE (nessuna oscillazione!)

(2) $ET_k \leq 1.1 \cdot 10^{-2}$ e $\log_{10} ET_k$ ha andamento REGOLARE;

(3) Il passo cresce regolarmente fino al massimo consentito dalla proc $\left(h_{MAX} = \dfrac{t_f - t_0}{10} \right)$;

(4) $N = 52$ di cui:



Per $EL\_MAX = 10^{-6}$ ...

<u>Es</u>: Spiegare l'andamento decrescente dell'errore totale. Perché la proc fa un ET_k <u>molto</u> più piccolo di EL_MAX? Non dovrebbe farlo visto che il controllo del passo ha lo scopo di rendere $EL_k \approx EL\_MAX$...

- Quando il passo è costante (ad es per $t_k \in [0.5, 1.5]$) si ha:

$$x_k = x_{k-1} + h\left[-100\, x_k + 10\right]$$

ovvero:

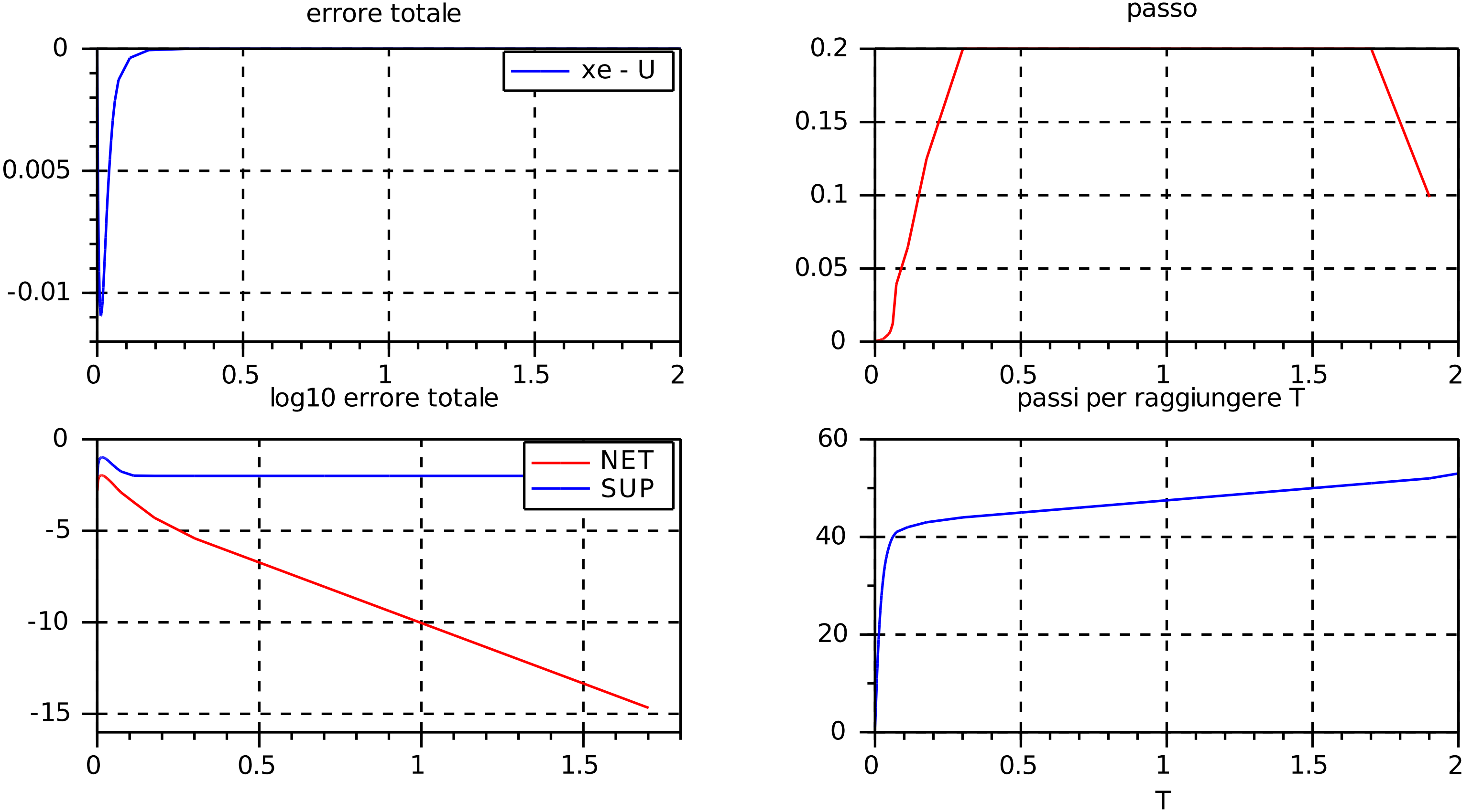
$$x_k - \frac{1}{10} = x_{k-1} - \frac{1}{10} - 100h\left[x_k - \frac{1}{10}\right]$$

$$\Rightarrow \quad (1+100h)\left(x_k - \frac{1}{10}\right) = x_{k-1} - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \quad x_k - \frac{1}{10} = \frac{1}{1+100h}\left(x_{k-1} - \frac{1}{10}\right)$$

$\in (0,1)$ per ogni $h > 0$!

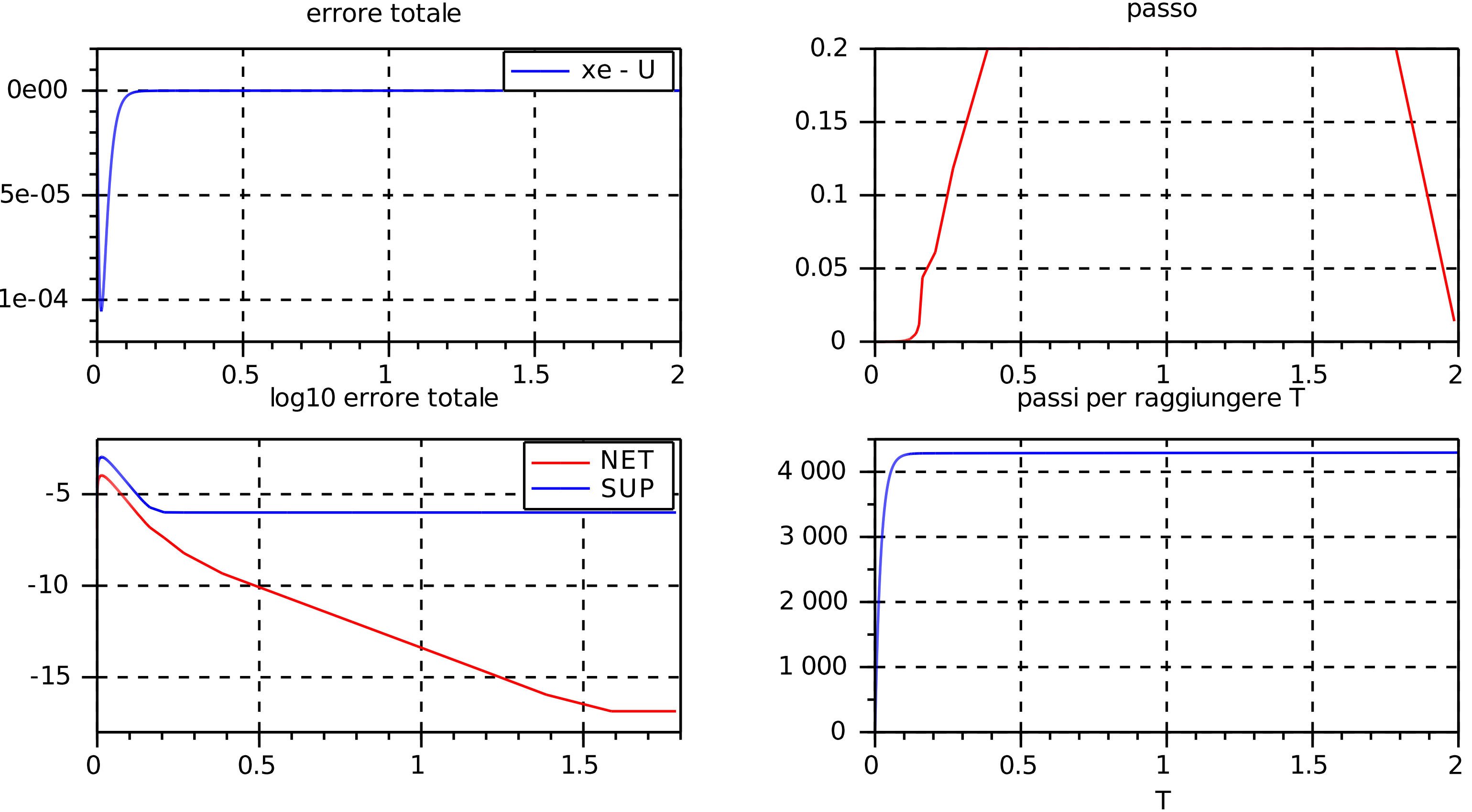
Quindi la successione $x_k - \frac{1}{10}$ è <u>monotona decrescente</u> ("STABILE") per ogni valore del passo (costante).



Errore totale massimo = 1.094D-02
Numero passi = 52
di cui 42 per raggiungere T = 0.2
e 10 da T = 0.2 a T = 2
Passo:
minimo = 6.250D-04
medio = 3.728D-02
massimo = 2.000D-01

Problema: dx/dt = -100 x + 10 , x(0) = 1

Procedura: LMV_eulero_imp_pv
SUP(k) = EL_MAX + SUP(k-1)*exp(-100*PASSO(k-1))
EL_MAX = 1.000D-02



Errore totale massimo = 1.055D-04
Numero passi = 4295
di cui 4283 per raggiungere T = 0.2
e 12 da T = 0.2 a T = 2
Passo:
minimo = 4.883D-06
medio = 4.625D-04
massimo = 2.000D-01

Problema: dx/dt = -100 x + 10 , x(0) = 1

Procedura: LMV_eulero_imp_pv
SUP(k) = EL_MAX + SUP(k-1)*exp(-100*PASSO(k-1))
EL_MAX = 1.000D-06