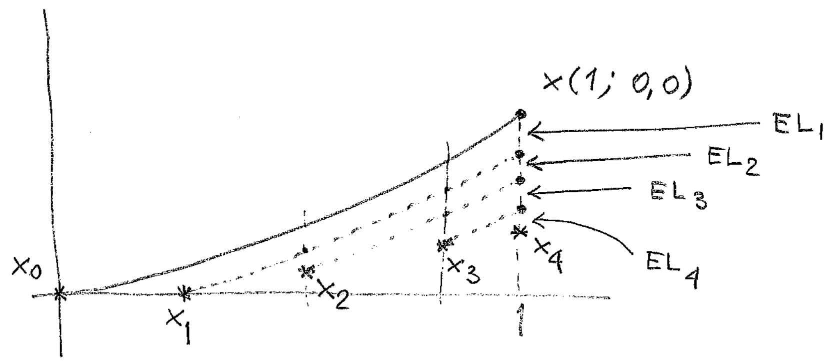
CN #43 / 10 maggio 2013 / A11

Es (continua):

- $\max_k (ET_k) = \max\left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{4}$

- se si richiede un err locale più piccolo:



In questo caso l'errore locale è propagato INALTERATO

$$\left.\begin{aligned} ET_4 &= EL_1 + \dots + EL_4 \\ ET_3 &= EL_1 + \dots + EL_3 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad \max_k ET_k = ET_4 = EL_1 + EL_2 + EL_3 + EL_4$$

$\boxed{\Rightarrow \text{ciascuno degli } EL_k \text{ è più piccolo, MA aumenta il numero di errori da sommare (= numero di passi)!}}$

- relazione tra il numero di passi N e l'errore locale massimo richiesto E

(1) come l'err locale EL_k dipende da h_{k-1}:

- $EL_k = \left| x_k - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) \right|$

- $x_k = x_{k-1} + h_{k-1} F(t_{k-1}, x_{k-1})$

$$\Rightarrow EL_k = \Big| \underbrace{x_{k-1}}_{= x(t_{k-1};\, x_{k-1},\, t_{k-1})} - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) + h_{k-1} F(t_{k-1}, x_{k-1}) \Big|$$

- posto $x(t; x_{k-1}, t_{k-1}) = X(t)$:

$$X(t_k) - X(t_{k-1}) = \dot{X}(t_{k-1})\, h_{k-1} + \frac{1}{2} \ddot{X}(\theta)\, h_{k-1}^2 \quad \text{con } \theta \in (t_{k-1}, t_k)$$

MA $X(t)$ è soluz del Pb di Cauchy :

a) $\dot{X}(t_{k-1}) = F\big(t_{k-1}, X(t_{k-1})\big) = F(t_{k-1}, x_{k-1})$

b) $\ddot{X}(\theta) = \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)\Big|_{t=\theta} = 1$

- $x(t_{k-1}; x_{k-1}, t_{k-1}) - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1})$

$$= -F(t_{k-1}, x_{k-1})\, h_{k-1} - \frac{1}{2} h_{k-1}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{EL_k = \frac{1}{2} h_{k-1}^2}$$

(2) come h_{k-1} dipende dall'errore locale massimo richiesto E:

- $EL_k \leq E \iff \frac{1}{2} h_{k-1}^2 \leq E$

$$\iff h_{k-1} \leq \sqrt{2E} \quad \dots \quad \boxed{h_{k-1} = \sqrt{2E}}$$

l'ultimo passo potrebbe essere più corto...

(3) $h_0 + \dots + h_{N-1} = t_f - t_0$

se $\forall h_k = \sqrt{2E}$: $\quad N\sqrt{2E} = t_f - t_0$

$$\Rightarrow \boxed{N = \frac{t_f - t_0}{\sqrt{2E}}}$$

- Nel caso in esame si ha:

$$ET_k = \sum_{i=1}^{k} EL_i \underbrace{=}_{\forall EL_i = E} kE$$

e $\boxed{\max_k ET_k = ET_N = NE}$

$$= \frac{t_f - t_0}{\sqrt{2E}} E = \boxed{\frac{t_f - t_0}{\sqrt{2}} \sqrt{E}}$$

$$\boxed{E \to 0 \quad \Rightarrow \quad \max_k ET_k \to 0}$$