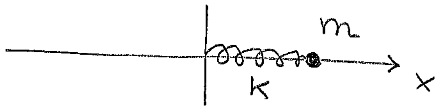
CN #41, 42 / 9 maggio 2013 / A11

* EQUAZIONI DIFFERENZIALI (ordinarie) *

- Forma normale (Pb di Cauchy)

<u>Es</u>: (oscillatore armonico)



Eq. Newton (lungo asse x): $m\ddot{x} = -kx$

$\sim \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ EQ del SECONDO ordine (cond iniz: $x(0), \dot{x}(0) \dots$)

Forma normale: SISTEMA di DUE eq del PRIMO ord:

$x_1 = x \;, \; x_2 = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 \end{cases}$

$$\sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\cdot} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Pb di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \\ \underbrace{x(t_0) = x_0}_{\text{CONDIZIONI INIZIALI}} \end{cases}$, $t \in [t_0, t_f]$

- $\boxed{\text{SOLUZIONE}}$: $x: [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n$, derivabile, che $\forall t \in [t_0, t_f]$ verifica l'eq (E) $x(t_0) = x_0$

<u>NOTAZIONE</u>: $x(t; x_0, t_0)$

- Ip: $\forall t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists!$ soluzione del Pb ...

- un METODO NUMERICO per l'APPROSSIMAZIONE della soluz del Pb di Cauchy ...

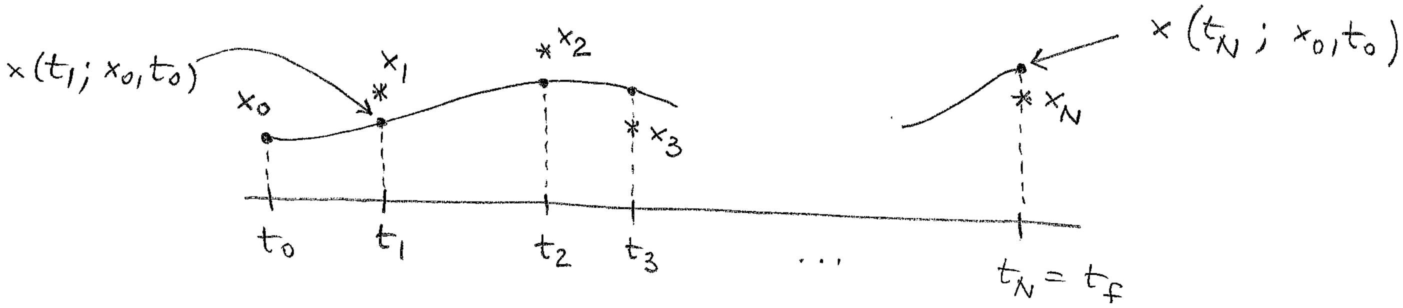
  ... costruisca valori $\boxed{x_0, x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n}$ da utilizz come approssimazioni di

  $$x(t_0; x_0, t_0),\ x(t_1; x_0, t_0), \dots,\ x(t_f; x_0, t_0)$$

  OVVERO come approssimaz dei valori della soluz $x(t; x_0, t_0)$ agli istanti

  $$\boxed{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N = t_f}$$

  Il numero $\boxed{h_k = t_{k+1} - t_k}$ si chiama PASSO di INTEGRAZIONE all'istante t_k.



PROCEDURA:

dati: x_0, t_0, t_f, F

uscita: $x_0, \dots, x_N$; $t_0, \dots, t_N$

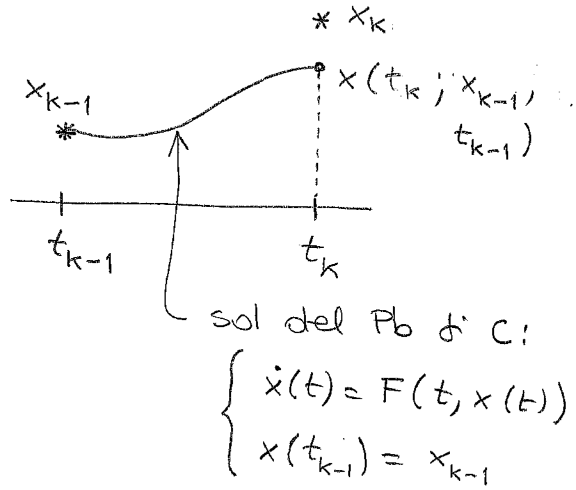
- $k = 0$;
- finché $t_k < t_f$ ripeti:
  - SCEGLI h_k

- CALCOLA x_{k+1}
- $t_{k+1} = t_k + h_k$
- $k = k+1$

<u>Oss</u>: la procedura SCEGLIE h_k per "controllare l'errore" come RICHIESTO dall'UTILIZZATORE. Tra i <u>dati</u> della procedura compare (in modo esplicito o no) un "errore massimo consentito";

la procedura CALCOLA x_{k+1} utilizz le info note all'ist t_k, in particolare $x_0, x_1, \dots, x_k$.

<u>def</u> (ERRORE LOCALE)

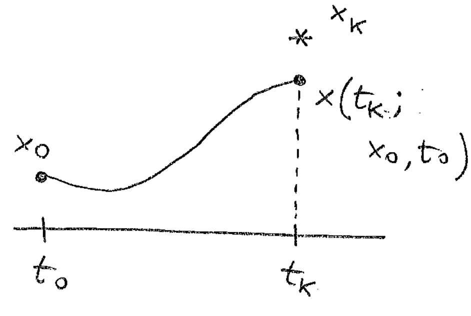


$$el_k = x_k - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1})$$

misura di quanto "sbaglia" la procedura nel "seguire" la soluz esatta che passa per $(t_{k-1}; x_{k-1})$

$$EL_k = \| el_k \| = \| x_k - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) \|$$

<u>def</u> (ERRORE TOTALE)



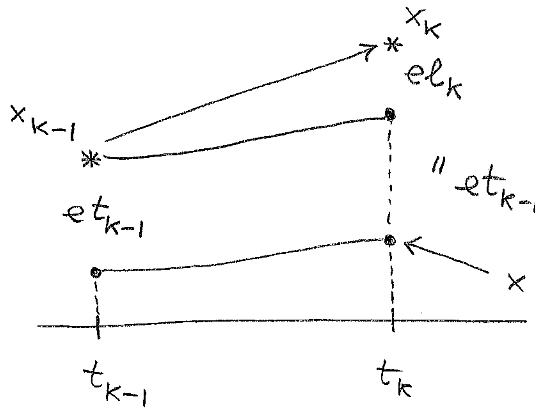
$$et_k = x_k - x(t_k; x_0, t_0)$$

$$ET_k = \| et_k \|$$

Oss: (1) $$ET_k = \| x_k - x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) +$$

$$+ \, x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) - x(t_k; x_0, t_0) \|$$

$$\leq EL_k + \underbrace{\| x(t_k; x_{k-1}, t_{k-1}) - x(t_k; x_0, t_0) \|}$$



"et_{k-1} propagato all'ist t_k"

(2) la procedura "controlla" l'<u>ERRORE LOCALE</u>, quindi quello totale solo <u>indirettamente</u>!

L'intento della procedura al passo k è quello di rendere x_{k+1} una buona approx di $x(t_{k+1}; x_k, t_k)$.

<u>Es</u>: $\begin{cases} \dot{x} = t \\ x(0) = 0 \end{cases}$, $x(t; 0, 0) = \frac{1}{2} t^2$ su $[\underset{t_0}{0}, \underset{t_f}{1}]$

- criterio per SCELTA h_k : $EL_k \leq \frac{1}{8}$
- CALCOLO x_{k+1} : $x_{k+1} = x_k + h_k t_k$

$$\boxed{\text{METODO di EULERO: } \quad \frac{x_{k+1} - x_k}{h_k} = F(t_k, x_k)}$$

- $k = 0$; $t_0 = 0$; $x_0 = 0$

in pratica la proc avrà una STIMA di el_1

- $t_0 < t_f$ $\quad (0 < 1)$

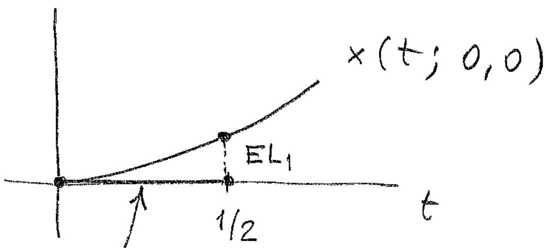
- scelta h_0: $\quad el_1 = x_1 - x(h_0; 0, 0)$

$$= x_0 + h_0 t_0 - \frac{1}{2} h_0^2 = -\frac{1}{2} h_0^2$$

$$\Rightarrow \quad EL_1 = \frac{h_0^2}{2} \leq \frac{1}{8} : \quad h_0 \leq \frac{1}{2} \ \dots \quad \boxed{h_0 = \frac{1}{2}}$$

- calcolo x_1: $\quad x_1 = x_0 + h_0 t_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

$$\boxed{x_1 = 0}$$



retta tang alla soluz $x(t; 0,0)$ in $t = 0$

$$\frac{x_1 - x_0}{h_0} = t_0 \qquad F(t_0, x_0) = \dot{x}(t_0)$$

rapporto incr

- $t_1 = t_0 + h_0$, $\quad \boxed{t_1 = \frac{1}{2}}$

$x(t; x_1, t_1) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{8}$

- $k = 1$; $\quad t_1 = \frac{1}{2} < 1 = t_f$

- scelta h_1: $\quad el_2 = x_2 - x(t_2; x_1, t_1)$

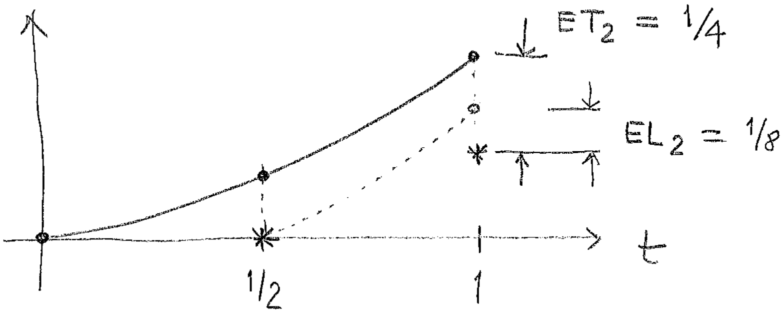
$$= x_1 + h_1 t_1 - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + h_1\right)^2 - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{2} h_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + h_1\right)^2 + \frac{1}{8}$$

si verifica che per $h_1 = \frac{1}{2}$ (così $t_2 = t_f$)

si ha $\quad EL_2 = \frac{1}{8} \ \dots \quad \boxed{h_1 = \frac{1}{2}}$

- calcolo x_2: $\quad x_2 = x_1 + h_1 t_1 = 0 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \boxed{x_2 = \frac{1}{4}}$

- $t_2 = t_1 + h_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = t_f$; $\boxed{t_2 = 1}$, stop.



uscita : $\underbrace{\left(0,\ 0,\ \frac{1}{4}\right)}_{x_k}$, $\underbrace{\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)}_{t_k}$

Metodo di EULERO :

$$\dot{x} = F(t,x) \Rightarrow \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(\theta)\,d\theta = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(\theta, x(\theta))\,d\theta$$

$$\Rightarrow x(t_{k+1}) - x(t_k) \simeq F(t_k, x(t_k))\,(t_{k+1} - t_k)$$

si appross l'integr con la somma di Riemann ...