* CRITERI di ARRESTO *

- $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile , $b \neq 0$.

(1) SE $\| r_k \| \leq E \| b \|$ ALLORA STOP

con $r_k = A x_k - b$ ...

- "calcolabile" e "certam verif dopo un numero FINITO di iterazioni"
- se verificato, allora: $\boxed{\dfrac{\| x_k - x^* \|}{\| x^* \|} \leq c(A) \dfrac{\| r_k \|}{\| b \|}}$

SE $c(A)$ grande (sistema mal condiz)

ALLORA: $\dfrac{\| r_k \|}{\| b \|}$ piccolo $\not\Rightarrow$ err rel piccolo.

(2) se $\| x_k - x_{k-1} \| < E$ allora STOP

- "calcolabile" e "certam verif ..." (perchè ?)
- se verif allora:

$$\boxed{\text{SE } \| H \| < 1 \text{ ALLORA } \quad \| x_k - x^* \| \leq \frac{\| H \|}{1 - \| H \|} \| x_k - x_{k-1} \|}$$

SE $\| H \| \simeq 1$ ALLORA: $\| x_k - x_{k-1} \|$ piccolo $\not\Rightarrow$ err assoluto piccolo

* Soluz di un sist NEL SENSO dei M.Q. *

def: $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $b \in \mathbb{R}^n$

$x^* \in \mathbb{R}^k$ soluz di $Ax = b$ nel senso dei mq

se

$$\forall x \in \mathbb{R}^k, \quad \| Ax - b \|^2 \geq \| Ax^* - b \|$$

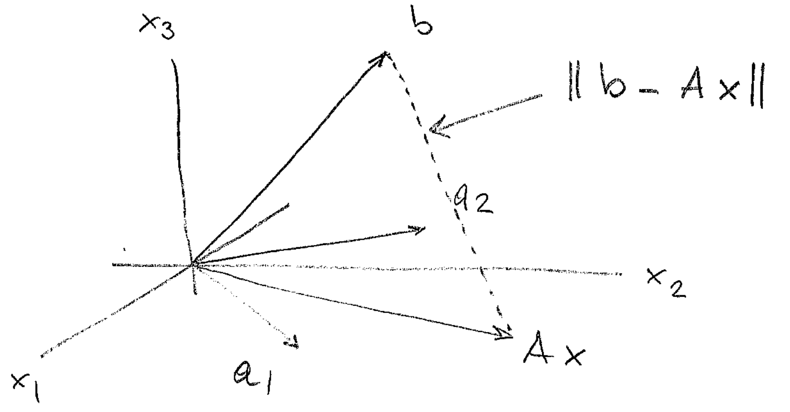
Oss: x^* è uno degli elem che rende minimo il valore della funzione

$$F(x) = \| Ax - b \|^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

- $x \in \mathbb{R}^2$; $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x_2$

- tra tutte le $x \in \mathbb{R}^2$ si cercano quelle che rendono minima la norma del vettore $Ax - b$ ~ tra tutte le comb lin delle colonne di A si cercano quelle (i coeff di quelle) che rendono minima la norma del vettore $Ax - b$ ...



- la norma $\|b - Ax\|$ è minima (ovvero $\|Ax - b\|^2$ è minima)

quando Ax è la <u>pr ortogonale di b</u> sul piano delle colonne di A

- $\forall b$, $\exists!$ pr ort di b sullo spazio gen dalle colonne di A <u>MA</u>:

  1) <u>SE</u> colonne di A <u>lin indip</u>: $\exists!$ comb lin che vale la pr ort, ovvero: $\exists!$ soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei mq

  2) <u>SE</u> colonne di A <u>lin dip</u>: $\exists$ infinite comb lin che valgono la pr ort, ovvero: $\exists$ infinite soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei mq.

- <u>TEO</u>: Sia A a colonne <u>LINEARMENTE INDIPENDENTI</u>. Allora: LA soluz di $Ax = b$ nel senso dei mq è LA soluz del <u>sistema delle eq.ni normali</u>

$$\boxed{A^T A x = A^T b}$$

dim: Sia $\hat{x}$ t.c. $A^TA\hat{x} = A^Tb$. Allora:

$\forall x \in \mathbb{R}^k$, $\|Ax-b\|^2 = \|Ax - A\hat{x} + A\hat{x} - b\|$

$= \| A(x-\hat{x}) + A\hat{x} - b\|^2 = \dots$

sono $\perp$: $(A\hat{x}-b) \cdot A(x-\hat{x}) = (x-\hat{x})^T A^T (A\hat{x}-b)$

$= (x-\hat{x})^T (A^TA\hat{x} - A^Tb) = 0$

$\dots = \|A(x-\hat{x})\|^2 + \|A\hat{x}-b\|^2$

- SE $x = \hat{x}$ allora $A(x-\hat{x}) = 0 \Rightarrow \|A(x-\hat{x})\|^2 = 0$

  SE $x \neq \hat{x}$ allora $\underbrace{A(x-\hat{x}) \neq 0}_{}$ $\Rightarrow \|A(x-\hat{x})\|^2 > 0$

  perché le colonne di A sono lin indip!

SE $x = \hat{x}$ allora $\|Ax-b\|^2 = \|A\hat{x}-b\|^2$

SE $x \neq \hat{x}$ allora $\|Ax-b\|^2 > \|A\hat{x}-b\|^2$

- Nelle ip del Teo, la matr A^TA è invertibile, quindi:

$$\boxed{\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb}$$

A^TA è <u>SIMM DEF POS</u> e quindi invertibile...

- $\forall x \in \mathbb{R}^k$: $(A^TAx) \cdot x = (x^TA^T)Ax = Ax \cdot Ax$

$= \| Ax \|^2 \geq 0$ (A^TA SEMI DEF pos)

inoltre: $\| Ax \| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$

def di norma

colonne di A lin indip

<u>def</u> (fatt QR, caso rettangolare):

$A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ a colonne lin indip;

U, T fatt QR di A se

- $U \in \mathbb{R}^{n \times k}$ a colonne ortonormali ($U^TU = I$)
- $T \in \mathbb{R}^{k \times k}$ tr sup
- $UT = A$

- $A = UT \Rightarrow A^TA = T^TU^TUT = T^TT$

$A^Tb = T^TU^Tb$

q. di $A^TA x = b \sim T^TT x = T^TU^Tb$

<u>MA</u> T invert (infatti...) $\Rightarrow T^T$ invert

q. di: $\boxed{A^TA x = b \sim Tx = U^Tb}$

caso semplice!