CN #36 / 3 maggio 2013 / A11

def (Metodo convergente): Il m it def da $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $c \in \mathbb{R}^n$ è CONVERGENTE se $\forall \gamma \in \mathbb{R}^n$ la succes x_k generata dal m è convergente (E) $\lim_{k \to \infty} x_k$ è indip da γ

Oss: confrontare con il caso NON LINEARE: in tal caso la situazione buona usuale è quella di CONVERGENZA LOCALE...

$\boxed{\text{TEO: Il m. it def da } H \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ e } c \in \mathbb{R}^n \text{ è convergente} \iff \rho(H) < 1.}$

RAGGIO SPETTRALE di H

$$= \max\{ |\lambda|,\ \lambda \in \sigma(H) \}$$

SPETTRO di H

$$= \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \det(H - \lambda I) = 0 \}$$

- Velocità di convergenza

$Ax = b$, A invert, $\exists!\, x^*$ tc $Ax^* = b$

H, c t.c. $(I-H)x = c \sim Ax = b$, ovvero

$(I-H)x^* = c$; se $x_k \to x^*$, $x_k - x^* \to 0$

e viceversa. Ma

$$x_{k+1} = Hx_k + c \iff x_{k+1} = Hx_k + x^* - Hx^*$$

$$\iff x_{k+1} - x^* = H(x_k - x^*)$$

ovvero, posto $e_k = x_k - x^*$: $\boxed{e_{k+1} = H e_k}$

iteraz per l'errore e_k

Es: $H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, con $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2|$;

$$e_k = H^k e_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} e_0 \quad \text{da cui}$$

$$\| e_k \| = \sqrt{(\lambda_1^k e_{01})^2 + (\lambda_2^k e_{02})^2} = \qquad \text{ip: } e_{01} \neq 0$$

$$= |\lambda_1|^k |e_{01}| \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} \left(\frac{e_{02}}{e_{01}}\right)^2}$$

dunque: $$\lim_{k \to \infty} \frac{\| e_k \|}{(\rho(H))^k} = |e_{01}| \quad \neq 0 \qquad \rho(H) = |\lambda_1|$$

ovvero: $$\boxed{\| e_k \| \approx |e_{01}| \, (\rho(H))^k}$$

Oss: Se fosse $e_{01} = 0$ (e $e_{02} \neq 0$) la succes tenderebbe a 0 PIÚ RAPIDAMENTE, ma salvo clamorosi colpi di fortuna...

Es: H diagonalizz: $H = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} V^{-1}$

con $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2|$

Posto $e_k' = V^{-1} e_k$ si ha:

$$e_k = H^k e_0 = \underbrace{V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \overbrace{V^{-1} e_0}^{e'_0}}_{\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} e'_0 = e'_k}$$

Dall' Es precedente, SE $e'_{01} \neq 0$:

$$\| e'_k \| \approx |e'_{01}| (\rho(H))^k$$

Inoltre: $\| e_k \| = \| V e'_k \| \leq \max \| V \text{ vers}(e'_k) \| \cdot \| e'_k \|$

$$= \| V \| \, \| e'_k \|$$

e $\| e_k \| = \| V e'_k \| \geq \min \| V \text{ vers}(e'_k) \| \cdot \| e'_k \|$

$$= \frac{1}{\| V^{-1} \|} \| e'_k \|$$

Q. di:
$$\frac{1}{\| V^{-1} \|} \| e'_k \| \leq \| e_k \| \leq \| V \| \, \| e'_k \|$$

$$\Rightarrow \frac{|e'_{01}|}{\| V^{-1} \|} (\rho(H))^k \lesssim \| e_k \| \lesssim \| V \| \, |e'_{01}| \, (\rho(H))^k$$

$$\boxed{\| e_k \| \approx C (\rho(H))^k}$$

- La rapidita' di convergenza della successione è determinata dal <u>raggio spettrale</u> di H.