CN #33 / 26 aprile 2013 / A11

* METODI DIRETTI in $F(\beta, m)$ *

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma \in (0,1)$, $b \in \mathbb{R}^2$

- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$; $\|A\| < \sqrt{3}$, $\|A^{-1}\| < \sqrt{3} \Rightarrow c(A) < 3$
- operando in $\mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & \boxed{EG} \arrow[r] & S, D \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{SI} \arrow[r] & x^* \\
b \arrow[rr] & & \boxed{SA} \arrow[r] & c \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$$S = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1/\gamma & 1 \end{matrix}}, \quad D = \boxed{\begin{matrix} \gamma & 1 \\ 0 & -1/\gamma \end{matrix}}$$

- operando in $F(\beta, m)$:

$$\begin{tikzcd}
\hat{A} \arrow[r] & \boxed{\widehat{EG}} \arrow[r] & \hat{S}, \hat{D} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\widehat{SI}} \arrow[r] & \hat{x} \\
\hat{b} \arrow[rr] & & \boxed{\widehat{SA}} \arrow[r] & \hat{c} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

- supponiamo che: $\hat{A} = A$, $\hat{b} = b$ (i dati sono in $F(\beta, m)$), $\widehat{EG}(A) = S, D$ (la fatt LR è esatta), $\widehat{SA}(S, b) \neq c$ con: $\|\hat{c} - c\| < u\|c\|$, $\widehat{SI}(D, \hat{c}) = SI(D, \hat{c})$...

... NONOSTANTE tutto questo, l'errore $\dfrac{\|\hat{x} - x^*\|}{\|x^*\|}$ può essere GRANDE:

$$\|D\| = \max \sqrt{(\gamma c+s)^2+\left(\frac{s}{\gamma}\right)^2} \geq \sqrt{1+\frac{1}{\gamma^2}} \qquad (c=0,\ s=1)$$

$$\min \sqrt{(\gamma c+s)^2+\left(\frac{s}{\gamma}\right)^2} \leq \sqrt{\gamma^2} \qquad (c=1,\ s=0)$$

$$\Rightarrow \quad c(D) = \|D\|\,\|D^{-1}\| \geq \frac{1}{\gamma}\sqrt{1+\frac{1}{\gamma^2}} \xrightarrow{\gamma \to 0} +\infty$$

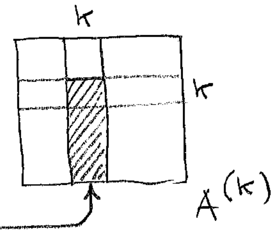
L'unico errore imputabile al computer ($\hat{c} \neq c$) è molto piccolo ($\approx$ precis di macchina) <u>MA</u> l'errore sulla soluzione può essere (in ~~effetti~~ è, per qualche b) molto grande poiché $c(D) \gg 1$.

- <u>Rimedio</u>: EGPP

Pivoting Parziale: si usa come pivot al passo k l'elemento

$$\max_{i \geq k} |a_{ik}^{(k)}|$$

elem di max modulo in



<u>Es</u>:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{12}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{32}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{H_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = P_{32} P_{12}$$

Oss: (1) lo scambio di righe si effettua non solo se il candidato pivot è zero

(2) $\forall i,j : |s_{ij}| \leq 1$

(3) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile:

$$\boxed{c(D) \leq F(n)\, c(A)}$$

dip solo dalla dim della matrice

in particolare NON si può avere crescita illimitata del n. di cond nel passaggio da A a D.

- uso della fatt QR in $F(\beta, m)$:

(1) $A = UT \Rightarrow \|A\| = \|UT\| = \max\limits_{\|v\|=1} \|U(Tv)\|$

$= \max\limits_{\|v\|=1} \|Tv\|$

$= \|T\|$

ortogonale $\Rightarrow \forall w$, $\|Uw\| = \|w\|$

(2) $T^{-1} = A^{-1}U \Rightarrow \|T^{-1}\| = \|A^{-1}U\| = \max\limits_{\|v\|=1} \|A^{-1}(Uv)\|$

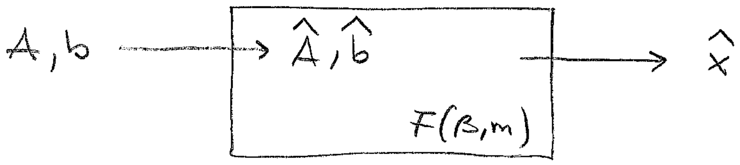
$= \max\limits_{\|Uv\|=1} \|A^{-1}(Uv)\| = \|A^{-1}\|$

Q.d.:

$$\boxed{c(T) = \|T\|\,\|T^{-1}\| = c(A)}.$$

<u>In pratica</u>:

(1) siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ i dati del Pb.



$\hat{A} = rd(A)$
$\hat{b} = rd(b)$

Nel caso migliore: $\hat{x}$ è t.c. $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$, ovvero è la sol <u>esatta</u> del sist con i dati perturbati.

Si ha: $\hat{A} = A + E$, $\hat{b} = b + f$ con

$$\|E\| \le nu\|A\|, \quad \|f\| \le nu\|b\|$$

dunque: $\boxed{\hat{x} \text{ t.c. } (A+E)\hat{x} = b + f \text{ con}}$

Teo condiz $\Rightarrow$ <u>SE</u> ... <u>ALLORA</u> $\dfrac{\|\hat{x} - x^*\|}{\|x^*\|} \le 2nu\, c(A)$

> Quando $c(A)$ molto grande ($nu\, c(A) \approx 0{,}1$), sistema <u>difficile da studiare</u>!

(2) utilizz EGPP o qr:

$$\hat{x} \text{ t.c. } (A+E)\hat{x} = b \quad \text{con } \|E\| \le F(n)u\|A\|$$

- $F(n) \approx n$ quasi sempre con EGPP, ma per qualche A si ha $F(n) \approx 2^n$;

- $F(x) \approx x$ utilizz QR calcolata ~~opportunam~~ (NON con GS!): l'istruzione qr di Scilab va bene.

Ancora: Teo condiz ...