CN # 31, 32 / 22 aprile 2013 / C43

TEO (di condizionamento)

Siano A, b dati del sistema da risolvere, E, f perturbazioni dei dati, $x_*, \hat{x}$ e α t.c.:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile
- $b \in \mathbb{R}^n$ non zero
- $A x_* = b \quad (x_* \neq 0)$

- $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c. $A+E$ invert
- $f \in \mathbb{R}^n$
- $(A+E)\hat{x} = b+f$

- $\|E\| \leq \alpha \|A\|$, $\|f\| \leq \alpha \|b\|$ (ovvero: α è un limite superiore per la misura delle perturbaz)
- $\alpha\, c(A) < \frac{1}{10}$

Allora: (1) $\dfrac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq 2\alpha\, c(A)$

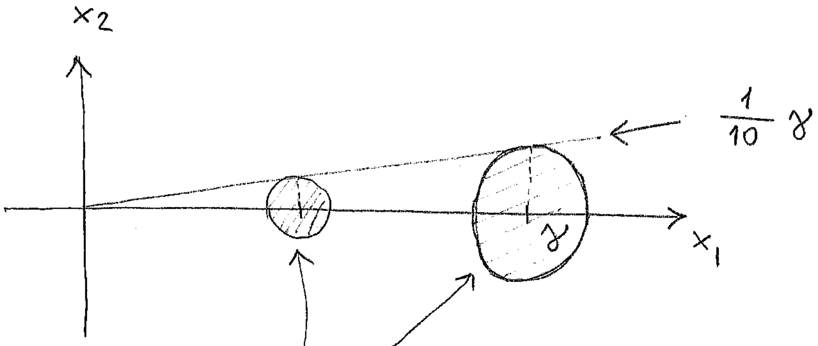
(2) $\exists$ dato b, perturbaz E, f t.c.

$$\frac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} = 2\alpha\, c(A)$$

- **Oss** (su errore relativo):

Siano $x_*, \hat{x}$ t.c. $\dfrac{\|\hat{x} - x_*\|}{\|x_*\|} \leq \dfrac{1}{10}$

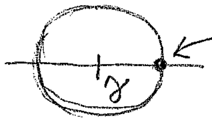
e $\|x_*\| = \gamma > 0$. In $\mathbb{R}^2$ (ad es $x_* = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$):



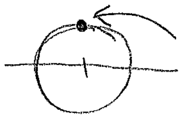
insiemi di tutti gli $\hat{x}$
che hanno err rel $\leq \frac{1}{10}$ da x_*

> Es: disegno analogo per errore ASSOLUTO
> $\|\hat{x} - x_*\| \leq \frac{1}{10}$.

Vediamo l'errore sulle singole componenti:

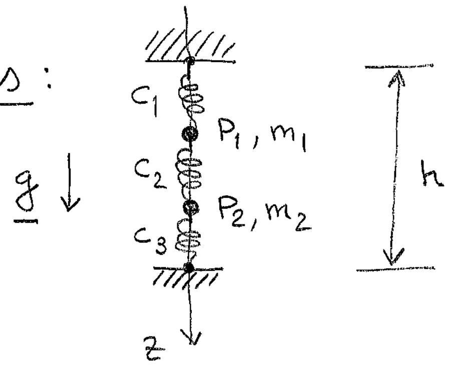
① ad es  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \gamma + \frac{1}{10}\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{|x_1^* - \hat{x}_1|}{|x_1^*|} = \frac{|\gamma - \gamma - \frac{1}{10}\gamma|}{|\gamma|} = \frac{1}{10}; \quad |x_2^* - \hat{x}_2| = 0$$

② ad es  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \frac{1}{10}\gamma \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{|x_1^* - \hat{x}_1|}{|x_1^*|} = 0; \quad \frac{|x_2^* - \hat{x}_2|}{|x_2^*|} = \frac{|0 - \frac{1}{10}\gamma|}{0} \quad \text{"} = \infty \text{"}!$$

Es:



Eq. statica:

① $m_1 g - c_1 z_1 - c_2 (z_2 - z_1) = 0$

② $m_2 g - c_2 (z_1 - z_2) - c_3 (z_2 - h) = 0$

sistema da studiare: $\underbrace{\boxed{\begin{matrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{matrix}}}_{A} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g + c_3 h \end{bmatrix}}_{b}$

- parametri: $c_1 = c_2 = c_3 = 100$ N/m
  $m_1 = m_2 = 1$ kg
  $g = 9{,}81$ m/s2 ; $h = 5$ m

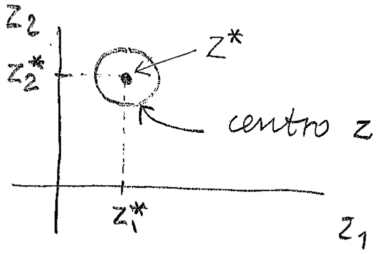
- soluzione: $z_1^* \simeq 1{,}76$ m ; $z_2^* \simeq 3{,}43$ m

- valore g noto solo con approssimazione: $|\delta g| < 10^{-2}$
  $\Rightarrow$ perturbaz dati: $f = \begin{bmatrix} m_1 \delta g \\ m_2 \delta g \end{bmatrix}$, $E = 0$,

$$\frac{\|f\|}{\|b\|} \simeq \frac{\sqrt{2}}{510} |\delta g| < 2{,}7 \, 10^{-5} \; = \alpha$$

- $c(A) = 3 \Rightarrow \alpha \, c(A) < \frac{1}{10}$
- $\hat{z}$: soluzione con $\hat{g}$ t.c. $|g - \hat{g}| < 10^{-2}$ ...

Teo condiz $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\|\hat{z} - z^*\|}{\|z^*\|} \leq 2 \alpha \, c(A) \simeq 1{,}6 \, 10^{-4}}$



centro z^*, raggio $1{,}6 \, 10^{-4} \|z\|$, include $\hat{z}$.

(dis NON in scala!)

- valori delle c_k noti solo con approssimazione: $|\delta c_k| < 1$

$\Rightarrow$ perturbazione dati: $E = \begin{bmatrix} \delta c_1 + \delta c_2 & -\delta c_2 \\ -\delta c_2 & \delta c_2 + \delta c_3 \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 0 \\ h\,\delta c_3 \end{bmatrix}$

$$\frac{\|E\|}{\|A\|} \leq \frac{3}{300} = 10^{-2} \; ; \qquad \frac{\|f\|}{\|b\|} \leq \frac{5}{510} < 10^{-2}$$

$= \alpha$

- $\alpha\, c(A) < \frac{1}{10}$

- $\hat{z}$ soluzione con $\hat{c}_k$ t.c. $|c_k - \hat{c}_k| < 1 \ldots$

Teo condiz $\Rightarrow \dfrac{\|\hat{z} - z^*\|}{\|z^*\|} \leq 2\alpha\, c(A) \simeq 6 \cdot 10^{-2}$

Es: stessa struttura ed ep dell' Es precedente.

- $\hat{z} \in \mathbb{R}^2$ soluzione approssimata, calcolata ad es con una procedura che realizza uno dei procedimenti visti (usando fatt LR o QR);

- def (residuo): $\underbrace{r = A\hat{z} - b}_{}$ (RESIDUO)

  $\neq 0$ a meno che $\hat{z}$ soluzione esatta!

- $\boxed{\hat{x} \text{ è SOLUZIONE ESATTA del SISTEMA PERTURBATO } Az = b + r}$

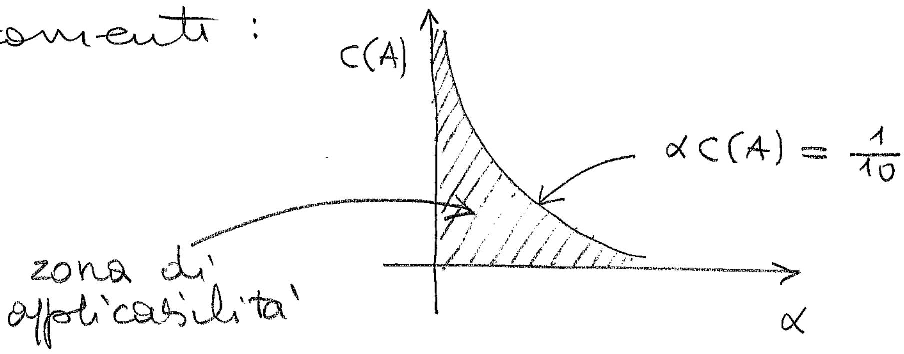
- $\alpha = \frac{\|r\|}{\|b\|}$, $c(A)$ numero di condiz di A;

<u>se</u> $\alpha \, c(A) < \frac{1}{10}$ <u>allora</u>

teo condiz $\Rightarrow \frac{\|\hat{z} - z^*\|}{\|z^*\|} \leq 2 \alpha \, c(A)$

<u>Oss</u>: Per utilizz teo condiz occorre $\alpha \, C(A) < \frac{1}{10}$.

Graficamente:



$$\boxed{\text{... più è GRANDE } c(A), \text{ più PICCOLO deve essere } \alpha \text{...}}$$
