CN #30 / 19 aprile 2013 / A11

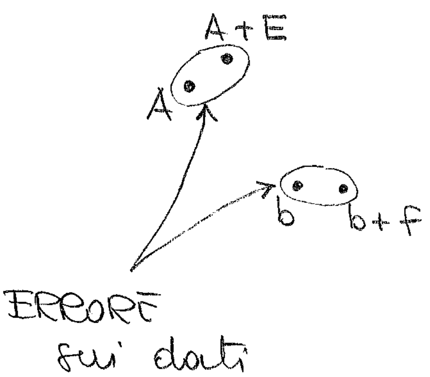
* CONDIZIONAMENTO *

... del Pb della soluz di un sist di eq lineari.

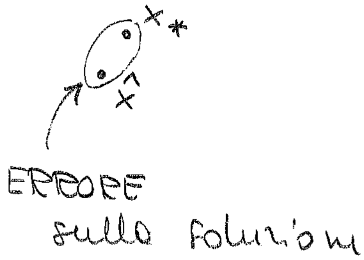
- A invertibile ($\in \mathbb{R}^{n\times n}$), $b \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\exists!\, x_*$ t.c. $Ax_* = b$ (soluzione)
- $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ perturbazione (additiva) di A

  $f \in \mathbb{R}^n$ " " di b
- ip: $A+E$ invertibile ...

  $\Rightarrow \exists!\, \hat{x}$ t.c. $(A+E)\hat{x} = b+f$
- <u>dati</u>

  <u>soluzione</u>

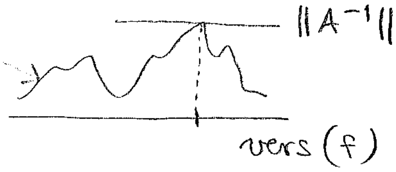
$\boxed{\text{Pb: assegnato un modo di \underline{misurare} gli errori, determ quanto grande può essere l'err sulla sol in funzione di quanto grande è quello sui dati.}}$

Es: $E=0$; $f\neq 0$

- x_* t.c $Ax_* = b$
- $\hat{x}$ t.c $A\hat{x} = b+f$
- $A(\hat{x}-x_*) = (b+f)-b = f \Rightarrow \boxed{\hat{x}-x_* = A^{-1}f}$
- $\|\hat{x}-x_*\| = \|A^{-1}f\|$ "errore assoluto"

$f = \frac{f}{\|f\|}\|f\|$ $\frac{f}{\|f\|} = \mathrm{vers}(f)$: vettore di norma uno che specifica la <u>direzione</u> di f

$$\Rightarrow \|\hat{x}-x_*\| = \|A^{-1}(\|f\|\,\mathrm{vers}(f))\|$$
$$= \|A^{-1}\,\mathrm{vers}(f)\|\,\|f\|$$



posto $\|A^{-1}\| \equiv \max_{f\neq 0} \|A^{-1}\,\mathrm{vers}(f)\|$

$$= \max\{\|A^{-1}v\|,\ \|v\|=1\}$$

si ha: $\|\hat{x}-x_*\| \leq \|A^{-1}\|\,\|f\|$

$\boxed{\exists f \text{ t.c. } =}$

- $b\neq 0$ $(\Rightarrow x_*\neq 0)$: $\frac{\|\hat{x}-x_*\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{\|f\|}{\|x_*\|}$

"errore relativo"

$\max\{\|Av\|,\ \|v\|=1\}$

<u>MA</u>: $Ax_* = b \Rightarrow \|b\| = \|Ax_*\| \leq \|A\|\,\|x_*\|$

$\boxed{\exists x_* \text{ (ovvero } b) \text{ t.c. } =}$

$$\Rightarrow \frac{\|b\|}{\|x_*\|} \leq \|A\|$$

err relativo su b

quindi: $$\frac{\|\hat{x}-x_*\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{\|f\|}{\|b\|}\frac{\|b\|}{\|x_*\|} \leq \|A^{-1}\|\,\|A\|\,\frac{\|f\|}{\|b\|}$$

<u>def</u> (numero di condizionamento)

sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile:

$$c(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

NUMERO di CONDIZIONAMENTO di A (dip dalla norma)