

- uno di EGP, SA, SI per risolvere $Ax = b$

$$[S, D, P] = \text{EGP}(A);$$

$$\Rightarrow \det A = 0$$

se EGP ha fallito allora STOP;

$$c = SA(S, Pb);$$

se $\det D = 0$ allora STOP;

PROCEDIMENTO SODDISFACENTE!

$$x = \text{SI}(D, c)$$

$$(Ax = b \rightarrow PAx = Pb \rightarrow SDx = Pb \dots)$$

* FATTORIZZAZIONE QR *

def: U, T fatt QR di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ significa

- 1) $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonale (colonne base o.n di \mathbb{R}^n)
- 2) $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tr superiore
- 3) $UT = A$

- int geometrica:

sia U, T una fatt QR di $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

u_1, u_2, u_3 (colonne di U) sono base o.n di \mathbb{R}^3 t.c.

$$(a_1, a_2, a_3) = (u_1, u_2, u_3) \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}$$

- \Rightarrow u_1, a_1 "sono sulla stessa retta",
 u_1, u_2 e a_1, a_2 "sono sullo stesso piano",
 u_1, u_2, u_3 e $a_1, a_2, a_3 \dots$

• determinazione di una fatt QR:

Es: $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

Passo 1: si cercano $\Omega = (w_1, w_2, w_3)$ a colonne ortogonali (non necess di norma uno!) e

Θ tr sup con $\theta_{kk} = 1$ t.c. $A = \Omega \Theta$.

$$(a_1, a_2, a_3) = (w_1, w_2, w_3) \begin{pmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{cases} a_1 = w_1 \\ a_2 = w_1 \theta_{12} + w_2 \\ a_3 = w_1 \theta_{13} + w_2 \theta_{23} + w_3 \end{cases}$$

Eq. 1 \Rightarrow $w_1 = a_1$

Eq. 2 \Rightarrow (i.1) $a_2 \cdot w_1 = (w_1 \theta_{12} + w_2) \cdot w_1 = (w_2 \cdot w_1 = 0!)$
 $= \theta_{12} (w_1 \cdot w_1)$

SE $w_1 \neq 0$ ALLORA

$$\theta_{12} = \frac{a_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}$$

ALTRIMENTI STOP

(ii) $w_2 = a_2 - w_1 \theta_{12}$

Eq. 3 \Rightarrow (i.1) $a_3 \cdot w_1 = (w_1 \theta_{13} + w_2 \theta_{23} + w_3) \cdot w_1 =$

$$= \theta_{13} (w_1 \cdot w_1) \Rightarrow \theta_{13} = \frac{a_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}$$

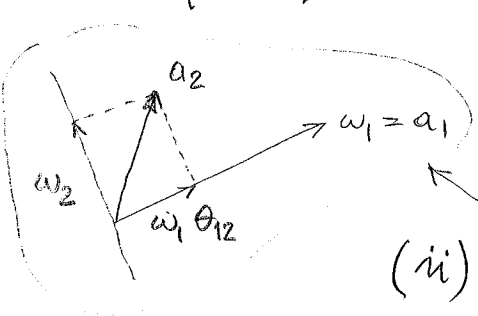
(i.2) $a_3 \cdot w_2 = (w_1 \theta_{13} + w_2 \theta_{23} + w_3) \cdot w_2 =$

$$= \theta_{23} (w_2 \cdot w_2)$$

SE $w_2 \neq 0$ ALLORA

$$\theta_{23} = \frac{a_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2}$$

ALTRIMENTI STOP



$$(ii') \quad \boxed{w_3 = a_3 - w_1 \theta_{13} - w_2 \theta_{23}}$$

Oss: Paso 1 termina regolarmente $\Leftrightarrow a_1, \dots, a_{m-1}$ lin indip.

Paso 2: se possibile, si normalizzano le colonne di Ω e se ne ricava una fatt QR.

$$(i) \quad \Delta = \text{di'ag}(\|w_1\|, \|w_2\|, \|w_3\|)$$

$\nearrow \neq 0$
 $\searrow \neq 0?$

(ii) SE $w_3 \neq 0$ ALLORA:

$$\Omega \theta = (\underbrace{\Omega \Delta^{-1}}_U) (\underbrace{\Delta \theta}_T) \quad \text{e' fatt QR!}$$

ALTRIMENTI STOP.

Oss: Paso 1 e Paso 2 terminano regolarmente $\Leftrightarrow A$ non singolare. Se terminano regolarmente, U, T e' fatt QR di A .

• uno delle fatt QR per risolvere $Ax = b$

$$[U, T] = \text{GS}(A) \quad \rightarrow \text{funzioni che realizza i due passi descritti}$$

se GS ha fallito allora STOP;

> $\Rightarrow \det A = 0$

$$c = U^T b;$$

$$x = SI(T, c);$$

PROCEDIMENTO
SODDISFACENTE !
