CN # 26, 27 / 15 aprile 2013 / C43

* PROCEDURA EG *

ES:

- $$\underset{A}{\overset{A^{(1)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}}} \xrightarrow{H_1} \underset{H_1 A^{(1)}}{\overset{A^{(2)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}} \xrightarrow{H_2} \underset{H_2 A^{(2)}}{\overset{A^{(3)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}} = D$$

- $D = H_2 H_1 A$ con H_1, H_2 tr inf con 1 sulla diag

$\Rightarrow A = \boxed{(H_1^{-1} H_2^{-1})} D$

$= S$ (tr inf con $s_{kk} = 1$)

- $$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 \\ -\lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

da H_2^{-1}

$\Rightarrow$ noti λ_{ij} costruire S è <u>banale</u>!

- calcolo λ_{ij}: ad es λ_{21} è l'<u>unico</u> t.c

$$[\text{riga } 2 \text{ di } A^{(1)}] - \lambda_{21} [\text{riga } 1 \text{ di } A^{(1)}]$$

$$= [0 \ \bullet \ \bullet] \quad (\text{riga } 2 \text{ di } A^{(2)})$$

il primo elem dell'uguaglianza è

$$a_{21}^{(1)} - \lambda_{21} a_{11}^{(1)} = 0$$

$\Rightarrow$ <u>SE</u> $a_{11}^{(1)} \neq 0$ <u>ALLORA</u> $\lambda_{21} = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$

PIVOT

MOLTIPLICATORE

REALIZZAZIONE

colonne da 1 a n−1 ← ... quelle da modificare ...

```
for k = 1:n-1,
    if A(k,k) = 0 then STOP
    else for j = k+1:n,
             A(j,k) = A(j,k) / A(k,k)
             A(j,k+1:n) = A(j,k+1:n) - A(j,k) A(k,k+1:n)
         end;
    end;
end;
```

k-esimo pivot nullo

righe da k+1 a n

moltiplicatore

Es:

$A = A^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

D, S, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$

$k=1$ $\quad a_{11} = 1 \neq 0 \rightarrow \boxed{j=2} \quad a_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1$

$$A(2,2:3) = [4,0] - 1 \cdot [2,1] = [2,-1]$$

$\boxed{j=3} \quad a_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1$

$$A(3,2:3) = [6,0] - 1 \cdot [2,1] = [4,-1]$$

$k=2$ $\quad a_{22} = 2 \neq 0 \rightarrow \boxed{j=3} \quad a_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{4}{2} = 2$

$$A(3,3) = -1 - 2 \cdot (-1) = 1$$

Pb: la procedura EG può arrestarsi prematuramente se $A(k,k) = a_{kk}^{(k)} = 0$ per un $k \in \{1, \dots, n-1\}$

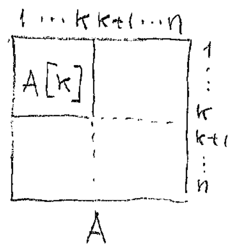
Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{22}^{(2)} = 0 \Rightarrow$ EG si arresta per $k = 2$.

TEO (terminazione regolare di EG)

La procedura EG determina una fattorizz LR della matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k)} \neq 0$ per $k = 1, \dots, n-1$

$\Leftrightarrow \quad \det A[k] \neq 0$ per $k = 1, \dots, \underline{\underline{n-1}}$



dim (cenno): $A^{(2)}[2] = H_1[2]\, A[2] \Rightarrow \det A[2] = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)}$;

in generale $\det A[k] = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)}$ etc.

- Uso di EG, SA, SI per risolvere $Ax = b$

[S, D] = EG(A);

se EG ha fallito allora STOP

$\not\Rightarrow \det A = 0$: ??

c = SA(S, b);

se $\det D = 0$ allora STOP

$\Rightarrow \det A = 0$: ok!

x = SI(D, c);

PROCEDIMENTO NON SODDISFACENTE!

Classi di matrici per le quali EG termina regolarm

(SDP) Simmetriche Definite Positive

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SDP significa:

1) $A^T = A$ (simmetrica)

2) $\forall x \begin{smallmatrix} \in \mathbb{R}^n \\ \neq 0 \end{smallmatrix}$, $F(x) = x^T A x > 0$

$F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Oss: } A \text{ è SDP} \iff \det A[k] > 0 \text{ per } k = 1, \dots, n}$$

(PDF) a Predominanza Diagonale Forte

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a PDF significa:

$\underbrace{\forall k = 1, \dots, n}_{\text{per ogni RIGA...}}$: $|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ (PDF per righe...)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Oss: } A \text{ è PDF} \Rightarrow \det A \neq 0 \\ \quad \text{e } A[k] \text{ è PDF}, \ k = 1, \dots, n \end{array}}$$

* Procedura EGP *

<u>Es</u>:

- $$\underset{A}{\overset{A^{(1)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}} \xrightarrow{H_1} \underset{H_1 A^{(1)}}{\overset{A^{(2)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}} \xrightarrow{P_2} \underset{P_2 A^{(2)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}} \xrightarrow{H_2} \underset{H_2 P_2 A^{(2)}}{\overset{A^{(3)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}} \xrightarrow{P_3}$$

$$\rightarrow \underset{P_3 A^{(3)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}} = D$$

- $$D = P_3 H_2 P_2 H_1 A \Rightarrow A = \underbrace{H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T}_{\text{NON è tr inf con 1 sulla diag...}} D$$

<u>MA</u>: $\underbrace{P_3 P_2 \left(H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1} P_3^T \right)}_{= S}$ sì!

quindi: $\underbrace{P_3 P_2}_{P} A = SD$

$$\boxed{EGP(A) = [S, D, P]}$$

t.c. S, D è fatt LR di PA $= EG(PA)$