CN #25 / 12 aprile 2013 / A11

- Caso generale

idea: fattorizzare A con (scrivere A come prodotto di) fattori semplici...

Es: ① fattorizzazione LR (o LU):

$S, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- S tr inf con $s_{kk} = 1$ ($\Rightarrow$ invertibile)
- D tr sup
- $SD = A$ $\boxed{A \text{ invert} \Leftrightarrow D \text{ invert}}$

② fattorizzazione QR:

$U, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- U ortogonale ($\Rightarrow$ invertibile)
- T tr sup
- $UT = A$ $\boxed{A \text{ invert} \Leftrightarrow T \text{ invert}}$

... poi (uso della fattorizz $A = MN$):

$$Ax = b \sim MNx = b$$

- cambio variabile: $c = Nx$
- $Mc = b$ caso semplice: determino c
- $Nx = c$ caso semplice: determino x

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

- verificare che la fattorizz è corretta (è LR)
- risolvere il sistema usando SA, SI.

Pb: come determinare una fattorizzazione?

- LR: eliminazione di Gauss;
- QR: procedura di ortonormalizzazione.

---

* Procedura EG *

Es:

- $$\underset{A}{\overset{A^{(1)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}}} \xrightarrow{H_1} \underset{H_1 A^{(1)}}{\overset{A^{(2)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}} \xrightarrow{H_2} \underset{H_2 A^{(2)}}{\overset{A^{(3)}}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}}} = D$$

- $D = H_2 A^{(2)} = H_2 (H_1 A^{(1)}) = (H_2 H_1) A$

  $\Rightarrow \quad A = \underbrace{H_1^{-1} H_2^{-1}}_{= S} D$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \underset{H_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A^{(1)}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{A^{(2)}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{H_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A^{(2)}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{A^{(3)}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = D$$

- H_1, H_2 tr inf con 1 sulla diagonale
  $\Rightarrow$ invertibili

- $H_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

- $H_1^{-1} H_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ è tr inf con 1 sulla diag $= S$