

* SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI *

Es:

- In ciascuna iterazione del m di Newton per $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Pb. statica lineare (circuiti elettrici lineari, sistemi di corpi rigidi: tralicci reticolari, ...)
- Pb dinamica lineare: regime sinusoidale (circuiti elettrici lineari, oscillazioni forzate di sistemi di corpi rigidi ...)

Pb: dati $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oppure $\mathbb{C}^{n \times n}$),
 $b \in \mathbb{R}^n$ (oppure \mathbb{C}^n)
 determinare $x \in \mathbb{R}^n$ (oppure \mathbb{C}^n) t.c. $Ax = b$

$\forall b \exists!$ soluz $\Leftrightarrow A$ invertibile

Metodi di soluzione:

- diretti (con un numero finito di op aritmetiche su a_{ij} e b_i ottengo la sol esatta)
- iterativi (costruisco una succen di vettori che \rightarrow soluzione)

Osc: realizzando un m. diretto con un calcolatore (ovvero operando in $F(\beta, m)$) si ottiene una

SOLUZIONE APPROSSIMATA.

Es: $n=1$, $A=3$, $b=1$: $3x=1$

$x = \frac{1}{3}$ (sol esatta con una operazione)

$\xi = 1 \oslash 3 = 0,33\dots$ (sol approssimata
con una pseudo-op)

Per ciascun metodo occorre studiare

- la PRECISIONE della approssimazione ottenuta
- il COSTO del calcolo dell'approssimazione

METODI DIRETTI

- Casi semplici (in base alla struttura di A)

(D) A diagonale ($i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$)

(1) A invertibile $\Leftrightarrow \forall k, a_{kk} \neq 0$

(2) Soluzione: $x_k = b_k / a_{kk} \quad k=1, \dots, n$

(T) A triangolare $\begin{cases} i > j \Rightarrow a_{ij} = 0 & \text{tr SUPERIORE} \\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0 & \text{tr INFERIORE} \end{cases}$

(1) A invertibile $\Leftrightarrow \forall k, a_{kk} \neq 0$

(2) Soluzione: $x = SI(A, b) \quad \text{tr sup}$

$x = SA(A, b) \quad \text{tr inf}$

cm :

SOSTITUZIONE
all'INDIETRO

function $x = SI(T, c)$

dati: T matrice $n \times n$ tr superiore, invertibile;
 c colonna con n componenti;

$$x_m = c_m / t_{mm};$$

uscita: x colonna con n comp
t.c. $Tx = c$

per $k = n-1, \dots, 1$ ripeti

$$s_k = c_k - (t_{k,k+1} x_{k+1} + \dots + t_{k,n} x_n);$$

$$x_k = s_k / t_{kk};$$

endfunction

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $SI(A, b) \dots$

Es: descrivere la procedura $x = SA(T, c)$ di
SOSTITUZIONE in AVANTI, che determina la
soluzione di un sistema con matrice tr inf.

(0) A ortogonale (• colonne di A base on di \mathbb{R}^n
risp ps canonico;
• $A^T A = I$
• $A^{-1} = A^T$)

(1) certamente invertibili

(2) soluzione: $x = A^T b$

(P) A matrice di permutazione (colonne [righe] di A sono una permutazione di quelle della matrice identica)

Es: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$

Oss: A di permutaz

- \Rightarrow A ortogonale
- $v \in \mathbb{R}^n$, le comp di Av si ottengono permutando quelle di v

(1) certamente invertibili <

(2) Soluzione: $x = A^T b$ (ottenuta permutando...)