CN # 18, 19 / 4 aprile 2013 / A11

Metodo di NEWTON (riepilogo)

- $$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- SE $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$, $f(\alpha) = 0$, $f'(x) \neq 0$ su $[a,b]$

  ALLORA : $h'(\alpha) = 0$

  > il M di Newt, quando utilizz per appross α, ha ORDINE di CONVERGENZA almeno 2

  e q. di : $$|x_{k+1} - \alpha| \approx \frac{1}{2}|h''(\alpha)|\,|x_k - \alpha|^2 ,$$

  ovvero : $$\log_{10}|x_{k-1} - \alpha| \approx 2 \log_{10}|x_k - \alpha| + C ,$$

  ovvero : $$\frac{\log_{10}|x_{k-1} - \alpha|}{\log_{10}|x_k - \alpha|} \approx 2 + \frac{C}{\log_{10}|x_k - \alpha|} \to 0$$

- Scelta x_0 :

  SE $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ e

  ① $\exists \alpha \in [a,b]$ t.c. $f(\alpha) = 0$

  ② $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$

ALLORA : scelto $x_0 =$ l'estremo di $[a,b]$

in cui $f(x_0) f''(x_0) > 0$, si ha

- $x_k \to \alpha$ (monotona)
- $\displaystyle \lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \frac{1}{2} |h''(\alpha)|$

> Oss : se $h''(\alpha) = 0$, la conv della success sarà PIÚ RAPIDA ...

Es : $f(x) = (x-2)^2$, $x_0 = 3$

- Il m. di NEWT genera una success monotona (decrescente) e $\displaystyle \lim_{k \to \infty} x_k = 2$

dim :
$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - 2)^2}{2(x_k - 2)} = x_k - \frac{x_k - 2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} - 2 = \frac{1}{2}(x_k - 2)$$

$$\Rightarrow \quad |x_k - 2| = \left(\frac{1}{2}\right)^k |x_0 - 2| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

- la rapidità di conv è $\approx$ quella del metodo di bisezione !

$$\boxed{\text{ORDINE di CONVERGENZA del M di Newt in questo caso: UNO} \quad \left[h'(x) = \frac{1}{2} \right]}$$

Es: $f(x) = (x-2)^{13}$, $x_0 = 3$

- Il m di Newt genera una succes decrescente con $\lim_{k \to \infty} x_k = 2$

- La convergenza è MOLTO LENTA:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - 2)^{13}}{13 (x_k - 2)^{12}} = x_k - \frac{x_k - 2}{13}$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} - 2 = \frac{12}{13} (x_k - 2)$$

$$\Rightarrow \quad |x_k - 2| = \left(\frac{12}{13} \right)^k |x_0 - 2|$$

Se, ad es, si vuole $|x_k - 2| < 10^{-7}$

occorrono ....

$$\left(\frac{12}{13}\right)^k < 10^{-7} \Rightarrow k > -\frac{7}{\log_{10}\frac{12}{13}} \approx 200$$

iterazioni

---

* CRITERIO di ARRESTO *

SE $\left|\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right| <$ tol ALLORA STOP

- "calcolabile"
- se $x_k \to \alpha$ allora $f(x_k) \to 0$;
  se inoltre $f'(\alpha) \neq 0$ allora $\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \to 0$:

certamente verif dopo un numero finito di it

- $$x_k - \alpha = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2}\frac{f''(\theta)}{f'(x_k)}(x_k-\alpha)^2$$

$$\Rightarrow \left| \underbrace{|x_k - \alpha|}_{d_k} - \underbrace{\left|\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right|}_{F_k} \right| \le \frac{1}{2}\frac{M_2}{m_1}|x_k-\alpha|^2$$

$m_1 \to \min_{[a,b]} |f'(x)| \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{|d_k - F_k|}{d_k} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\frac{M_2}{m_1}\, d_k}$$

SE $x_k \to \alpha$, $d_k \to 0$

ALLORA : $\boxed{\text{err rel} \to 0}$

Nella pg WEB:

- file di def di una funzione che realizza il m. di Newt

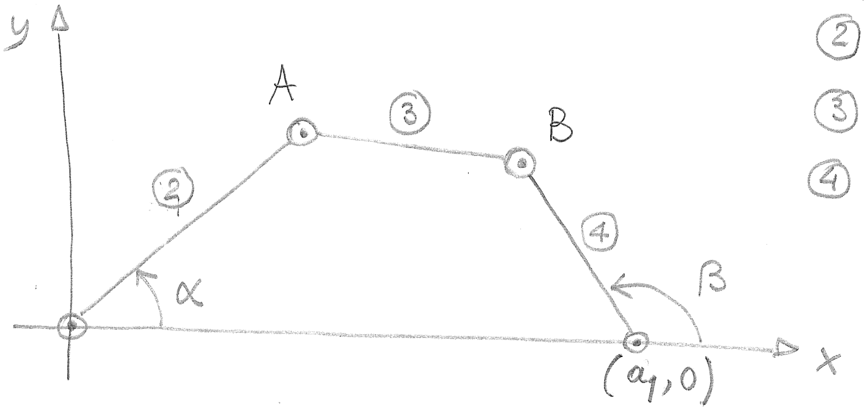
  uso :

  [z, v, info, xxx_newt] =

  = newton1d (f_newt, x0_newt, Jf_newt, E_newt, kmax, dialogo_newt)

- file con esempi "guidati".

Es (cinematica):



Lungh aste :

② $a_2 = 13$ cm

③ $a_3 = 8$ cm

④ $a_4 = 10$ cm

$a_1 = 10$ cm

- legami tra α e β :

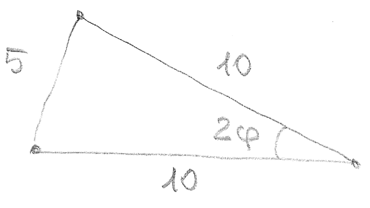
$$A \equiv \begin{pmatrix} a_2 \cos\alpha \\ a_2 \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}, \qquad B \equiv \begin{pmatrix} a_1 + a_4 \cos\beta \\ a_4 \operatorname{sen}\beta \end{pmatrix}$$

$$d^2(A,B) = a_3^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 + 2a_1 a_4 \cos\beta - 2a_1 a_2 \cos\alpha - 2a_2 a_4 \cos(\alpha-\beta) = 0$$

- det i DUE possibili valori di α per $\beta = 0$

- Assegnato $\beta \leq \beta_{MAX}$, $\exists$ (uno o due) valori di α "compatibili". Per $\beta > \beta_{MAX}$ $\nexists$ α compatibili. Determinare β_{MAX}.

(


$\operatorname{sen}\varphi = 0{,}25 \ldots$)