CN #16,17 / 25 marzo 2013 / C43

Esercizio : sia $h(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- determ i pti uniti di h (siano α_0, α_1);
- determ $h'(\alpha_0)$, $h'(\alpha_1)$ ed utilizz per decidere se il m. it def da h sia utilizz per appross α_0 ed α_1;
- modif il file di esempio relativo ai metodi ad un punto (LMV_MetodiUnPunto_00.sce) per utilizzarlo con la funz h assegnata
  (N.B: utilizz opportunam l' operatore .^ :
  se x è una matrice r×s, allora
  x.^2 = la matrice r×s di elem i,j
  dato da x_{ij}^2);
- Scegliere $x_0 = 0.45$ ed interpretare il grafico finale riguardante la stima dell' errore;
- Scegliere $x_0 = 0,5$ e giustificare l' errore dichiarato dalla procedura;
- Scegliere $x_0 = -1$ ed interpretare i risultati (l' iterazione termina con successo, ma poi nasce un problema nel grafico finale ...)
- Scegliere $x_0 = -0.999$ e poi $x_0 = -1,001$:

accade qualcosa di "imprevisto"?

- determ tutti i valori x_0 t.c. <u>la succes</u> generata dal m. it def da h a partire da x_0 <u>converge a 1</u>.

---

* METODO di NEWTON *

- $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ con derivata $f' \neq 0$ su $[a,b]$, è il m. it ad un punto def da

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- PROPRIETÀ:

(I) $f(x)=0$ equivalente a $x = h(x)$

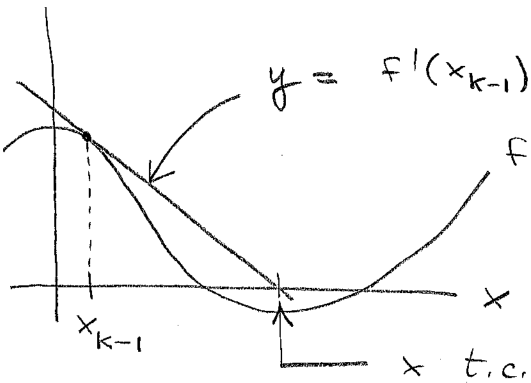
(II) <u>se</u> $f \in C^2[a,b]$ e α zero di f <u>allora</u>:

$$h'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h'(\alpha) = 0}$$ (si ricordi che, per ip, $f'(x) \neq 0$)

$\boxed{\text{Teo conv LOCALE} \Rightarrow \text{m di Newt certam utilizz per appross } \alpha.}$

(III) Int geometrica (METODO delle TANGENTI):



x t.c. $f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) = 0$

<u>ovvero</u> : $x = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} = h(x_{k-1})$

(IV) Scelta di x_0 per m di Newt:

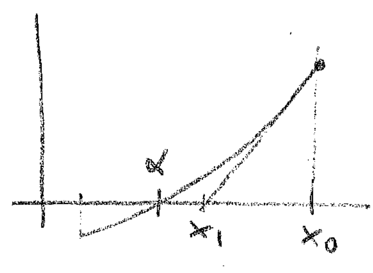
<u>SE</u> $[a,b]$, $f \in C^2[a,b]$, x_0 t.c.

1) $\exists\, \alpha \in [a,b]$ zero di f
2) $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0$ $[\Rightarrow \alpha$ unico zero$]$
3) $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$

<u>ALLORA</u> : la succes gen dal m di Newt a partire da x_0...

1) e' CONVERGENTE ad α
2) e' MONOTONA

<u>dim</u> : graficamente...



$\alpha < \ldots < x_1 < x_0$

(IV) sia $x_k \to \alpha$ gen da m. it def da h
con $x_k \neq \alpha$ per ogni k; allora:

$$x_{k+1} - \alpha = h(x_k) - h(\alpha) =$$

$$= h'(\alpha)(x_k - \alpha) + \frac{1}{2} h''(\theta)(x_k - \alpha)^2$$

con θ tra x_k ed α

SE $\boxed{h'(\alpha) \neq 0}$ ALLORA: $\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = |h'(\alpha)|$

$|h'(\alpha)| < 1$

ORDINE di CONV = 1

SE $h'(\alpha) = 0$ ALLORA: $\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \frac{1}{2}|h''(\alpha)|$

ORDINE di CONV = 2

[e h suff regolare ...]

Confronto:

1 $d_{k+1} = |h'(\alpha)| d_k$

$\Rightarrow d_k = |h'(\alpha)|^k d_0$

$\Rightarrow \log_{10} d_k = k \log_{10} |h'(\alpha)| + \log_{10} d_0$

2 $d_{k+1} = M d_k^2$

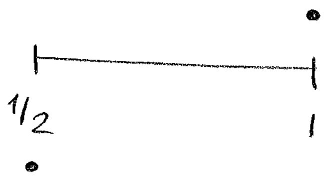
$\Rightarrow d_k = \frac{(M d_0)^{2^k}}{M}$

$\Rightarrow \log_{10} d_k = 2^k \log_{10} (M d_0) - \log_{10} M$

$\forall \theta, \frac{\theta k}{2^k} \to 0 \Rightarrow$ odc 2 più rapido di $\forall$ odc 1

Es: $f(x) = x + \ln x$

- $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ zero di f



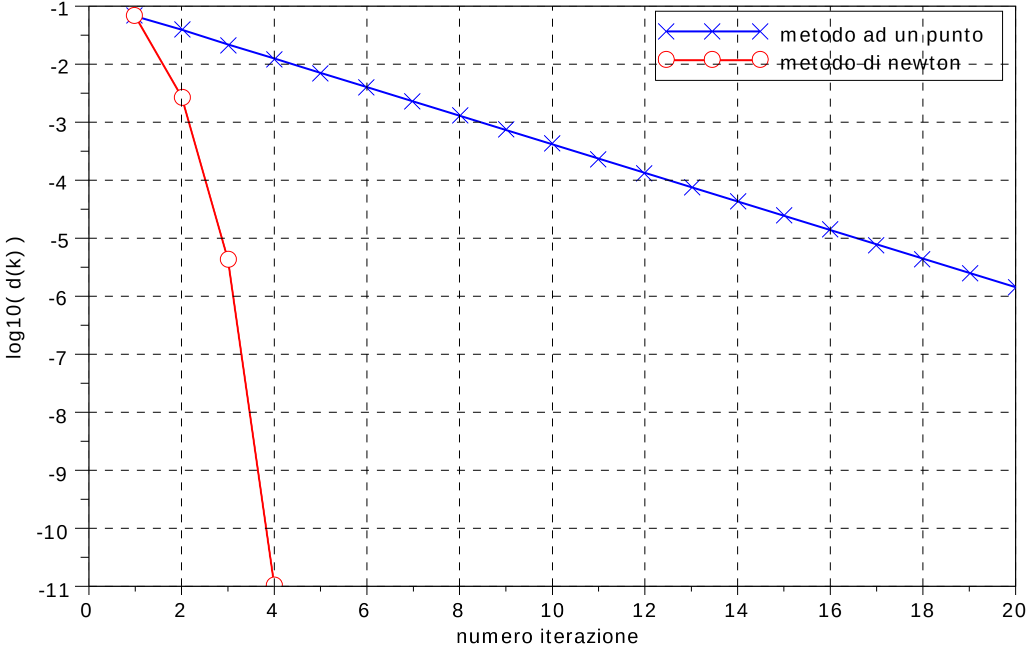
- $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$
- $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ success $x_k \longrightarrow \alpha$, crescente.

Confronto tra

1) success gen dal m. it def da $h_2(x) = e^{-x}$ a partire da $x_0 = \frac{1}{2}$

2) success gen dal m di Newt a partire da $x_0 = \frac{1}{2}$

Per entrambe l'err (assoluto) iniziale è $|x_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \simeq 7 \cdot 10^{-2}$



metodo ad un punto
metodo di newton
log10(d(k))
numero iterazione
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20