CN #15 / 22 marzo 2013 / A11

* CRITERI d'ARRESTO *

TEO (f di Taylor con resto):

se $h \in C^2[a,b]$, allora:

$\forall x, y \in [a,b]$, $\exists\, \theta$ tra x ed y t.c.

$$h(x) - h(y) = h'(y)(x-y) + \frac{1}{2} h''(\theta)(x-y)^2$$

- Siano $[a,b]$, h che verif ip (1) e (2') del Teo di convergenza, α pu di h in $[a,b]$, x_k una success gen dal m. it def da h con $x_k \in [a,b]$, $x_k \to \alpha$; infine sia $h \in C^2[a,b]$.

$\boxed{1}$ se $|x_{k+1} - x_k| < tol$ allora STOP

$$x_{k+1} - x_k = h(x_k) - x_k = \big(h(x_k) - h(\alpha)\big) - (x_k - \alpha)$$

$$= h'(\alpha)(x_k - \alpha) + \frac{1}{2} h''(\theta)(x_k - \alpha)^2 - (x_k - \alpha)$$

$$\Rightarrow \big|\, |x_{k+1} - x_k| - |x_k - \alpha| \,\big| \le |h'(\alpha)|\, |x_k - \alpha| +$$

$$+ \frac{1}{2} M_2 |x_k - \alpha|^2$$

$\max |f''|$

Posto: $|x_k - \alpha| = d_k$, $|x_{k+1} - x_k| = \Delta_k$

si riscrive...

$$|\Delta_k - d_k| \leq |h'(\alpha)|\, d_k + \frac{1}{2} M_2\, d_k^2$$

$$\Rightarrow \frac{|\Delta_k - d_k|}{d_k} \leq |h'(\alpha)| + \underbrace{\frac{1}{2} M_2\, d_k}_{\to 0}$$

Q.d.: Δ_k è una stima di d_k con err relativo $\approx |h'(\alpha)| < 1$. Se $h'(\alpha) \neq 0$ l'errore è "costante"...

<u>Es</u>: $h'(\alpha) = \frac{1}{100}$; $d_k = 10^{-4}$

$$\Rightarrow \Delta_k \in 10^{-4} \pm 10^{-6} \quad (\text{bene: } \Delta_k \approx d_k)$$

<u>Ma</u> se $h'(\alpha) = \frac{9}{10}$, $d_k = 10^{-4}$

$$\Rightarrow \Delta_k \in [0{,}1\ 10^{-4} ; 1{,}9\ 10^{-4}]$$

(meno bene: Δ_k può essere significativamente più piccolo o più grande di d_k !)

$\boxed{2}$ <u>se</u> $\left| \dfrac{h(x_k) - x_k}{1 - h'(x_k)} \right| < tol$ <u>allora</u> STOP

$$h(x_k) - x_k = (\alpha - x_k) - \big(h(\alpha) - h(x_k)\big)$$

$$= (\alpha - x_k) - \left[h'(x_k)(\alpha - x_k) + \frac{1}{2} h''(\theta)(\alpha - x_k)^2 \right]$$

$$= \big(1 - h'(x_k)\big)(\alpha - x_k) - \frac{1}{2} h''(\theta)(\alpha - x_k)^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha - x_k = \frac{h(x_k) - x_k}{1 - h'(x_k)} + \frac{1}{2} \frac{h''(\theta)}{1 - h'(x_k)} (\alpha - x_k)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left| |x_k - \alpha| - \left| \frac{h(x_k) - x_k}{1 - h'(x_k)} \right| \right| \leq \frac{1}{2} \frac{M_2}{1 - L} |\alpha - x_k|^2$$

Posto: $\left| \dfrac{h(x_k) - x_k}{1 - h'(x_k)} \right| = F_k$, si riscrive ...

$$|d_k - F_k| \leq \frac{1}{2} \frac{M_2}{1 - L} d_k^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|d_k - F_k|}{d_k} \leq \frac{1}{2} \frac{M_2}{1 - L} d_k \longrightarrow 0$$

Q.d': F_k è una stima di d_k con errore relativo $\longrightarrow 0$!