CN #11,12 / 18 marzo 2013 / C43

• Metodo ad un punto def da $h : [a,b] \to \mathbb{R}$:

<u>dati</u> $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$

- $x_0 = \gamma$
- <u>per</u> $k = 1, 2, 3, \ldots$ <u>ripeti</u>

    <u>se</u> $x_{k-1} \notin [a,b]$ <u>allora</u> STOP

    <u>altrimenti</u> $x_k = h(x_{k-1})$

<u>uscita</u> : quando un opportuno criterio di arresto è verificato : x_k

<u>Pb</u> : decidere se $\exists$ valori di γ che generano una succ <u>convergente</u>.

<u>TEO</u> (di convergenza)

Siano $[a,b]$, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\gamma \in [a,b]$ t.c.

(1) $\exists \alpha$ pu di h in $[a,b]$;

(2) $\exists L \in [0,1)$ t.c. $\forall x, y \in [a,b]$ si ha $|h(x) - h(y)| \leq L |x - y|$

(3) la succes $x_0 = \gamma$, $x_1 = h(x_0)$, $x_2 = h(x_1), \ldots$ e' in $[a,b]$

<u>Allora</u> : 1 α è l' <u>unico</u> pu di h in $[a,b]$;

2 la succes $x_0 = \gamma$, $x_1 = h(x_0)$, $x_2 = h(x_1), \ldots$ <u>è</u> <u>convergente</u> (ad α)

<u>dim</u> : 1 Per assurdo. <u>ip</u> : $\exists \beta \neq \alpha$ pu di h in $[a,b]$;

<u>allora</u> : $|\beta - \alpha| = |h(\beta) - h(\alpha)| \leq L|\beta - \alpha| < |\beta - \alpha|$, <u>assurdo</u>.

(2) $|x_k - \alpha| = |h(x_{k-1}) - h(\alpha)| \leq L\,|x_{k-1} - \alpha|$

ma: $|x_{k-1} - \alpha| = |h(x_{k-2}) - h(\alpha)| \leq L\,|x_{k-2} - \alpha|$

q.di: $|x_k - \alpha| \leq L^2\,|x_{k-2} - \alpha|$

iterando il ragionamento: $|x_k - \alpha| \leq L^k\,|x_0 - \alpha|$

e siccome $L < 1$: $\boxed{\lim_{k\to\infty} |x_k - \alpha| = 0}$

Oss:

- sotto le ip del Teo di convergenza, la succes

$$\delta_k = |x_k - \alpha|$$

degli errori assoluti (che $\to 0$):

(A) è MONOTONA decrescente;

(B) $\delta_k \leq L^k \delta_0$: tende a 0 con velocità ALMENO pari a quella di L^k.

- SE $h \in C^1[a,b]$ e $\forall x \in [a,b]$ si ha $|h'(x)| \leq L$

ALLORA:

$$\forall x, y \in [a,b],\ |h(x) - h(y)| \underset{\text{Teo di Lagrange}}{=} |h'(\underset{\text{tra } x \text{ ed } y}{\theta})|\,|x-y| \overset{ip}{\leq} L\,|x-y|$$

q.di, una condiz che implica l'ip (2) del TEO di convergenza è:

(2') $h \in C^1[a,b]$ ed $\exists L \in [0,1)$ t.c.
$\forall x \in [a,b]$ si ha $|h'(x)| \le L$

- **SE** ip (1) e (2) del Teo di conv sussistono per $[a,b]$ e $h:[a,b] \to \mathbb{R}$, **ALLORA**: posto

$\gamma =$ l'estremo di $[a,b]$ più vicino ad α

si ha: $|x_1-\alpha| \le L|\overbrace{x_0}^{=\gamma \in [a,b]}-\alpha| < |x_0-\alpha| \Rightarrow x_1 \in [a,b]$,

$$|x_2-\alpha| \underbrace{\le}_{\text{perchè } x_1 \in [a,b]} L|x_1-\alpha| \le L^2|x_0-\alpha| < |x_0-\alpha| \Rightarrow x_2 \in [a,b]$$

ecc, ovvero la success $x_0=\gamma$, $x_1=h(x_0)$, ... È IN $[a,b]$!

Oss: SE α pto centrale di $[a,b]$, $\forall \gamma$ si ottiene success convergenti

Pb: come decido quale dei due estremi di $[a,b]$ è più vicino ad α?

Considero $F(x) = x - h(x)$: è CRESCENTE in $[a,b]$ e $F(\alpha)=0 \Rightarrow$

$F(a)<0$, $F(b)>0$ e valutando il segno di $F\left(\frac{a+b}{2}\right)$...

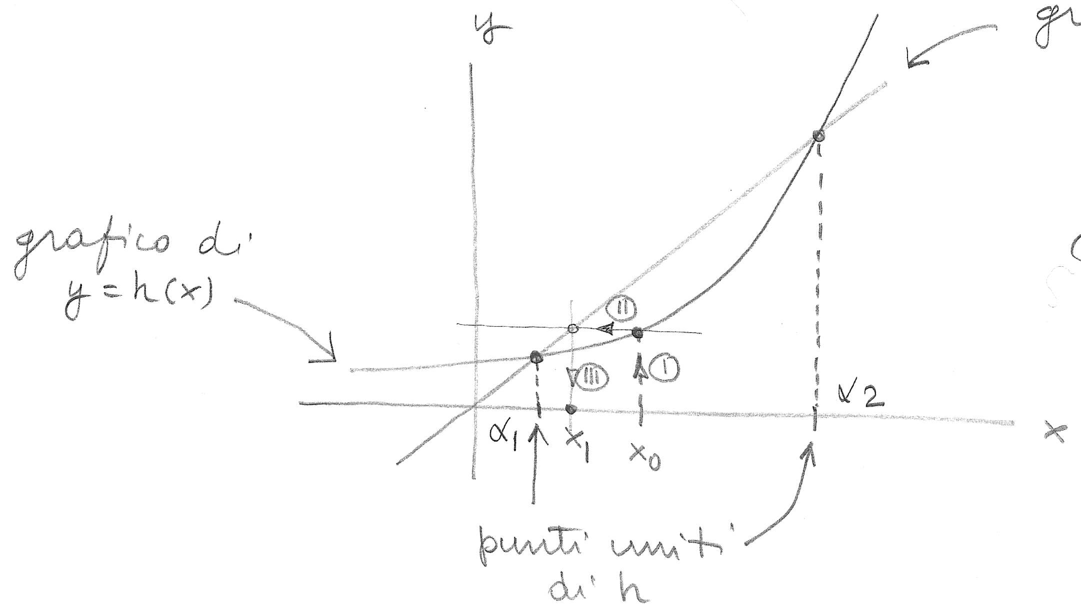
• **TEO** (di convergenza LOCALE):

Siano $h \in C^1[a,b]$ e $\alpha \in [a,b]$ pu di h.

SE $|h'(\alpha)| < 1$ **ALLORA** $\exists\, \rho > 0$ t.c. ip Teo di convergenza verificate da $[\alpha-\rho, \alpha+\rho]$, h e $\forall \gamma \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$

> **Oss:** NON si chiedono propr di h' valide GLOBALMENTE su $[a,b]$, ma SOLO in α. DI CONSEGUENZA si "trova" un intervallo $[\alpha-\rho, \alpha+\rho]$ su cui $|h'(x)| \leq L < 1$ per ogni x.

COSTRUZIONI GRAFICHE



I, II, III: procedura grafica per det x_1 a partire da x_0.

È graficamente evidente che $0 < h'(\alpha_1) < 1$ e $h'(\alpha_2) > 1$: il Teo di conv locale ci assicura che ...