CN # 8,9 / 14 marzo 2013 / A11

* STABILITA' e CONDIZIONAMENTO *

Es: Si vuole appross il valore di una funz $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nel punto $x \in \mathbb{R}$, utilizz il calcolatore.

Problemi:

a) il calcolatore non sa calcolare f: al suo posto calcola $\phi : M \to M$

b) il calcolatore non sa operare con x: lo sostituisce con $\xi \in M$ (ad es con $\xi = rd(x)$)

n d m

Dunque: si approssima $f(x)$ con $\phi(\xi)$.

Errore commesso (assoluto)...

$$|f(x) - \phi(\xi)| \leq \boxed{|f(x) - f(\xi)|} + \boxed{|f(\xi) - \phi(\xi)|}$$

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$
$$\xi \xrightarrow{f} f(\xi)$$
$$\xi \xrightarrow{\phi} \phi(\xi)$$

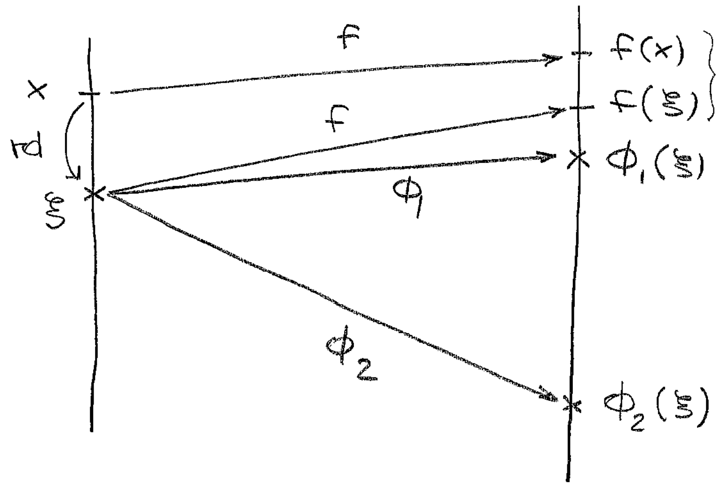
Questa q.ta' NON dip da ϕ; il suo studio si chiama analisi del CONDIZIONAMENTO del pb del calcolo di f in x

Questa q.ta' NON dip da x; il suo studio si chiama analisi della STABILITA' di ϕ come appross di f

Es: $f(x) = (x-2)^{13}$, $x \in [1,8 \,;\, 2,2]$

$\phi_1(\xi) = (\xi - 2)$^ 13

$\phi_2(\xi) =$ horner $(\ldots)$



Misurando gli errori in senso assoluto...

$\downarrow$

ϕ_1 è un'approx di f (molto) più STABILE di quanto non lo sia ϕ_2;

il calcolo di f in x è BEN CONDIZIONATO

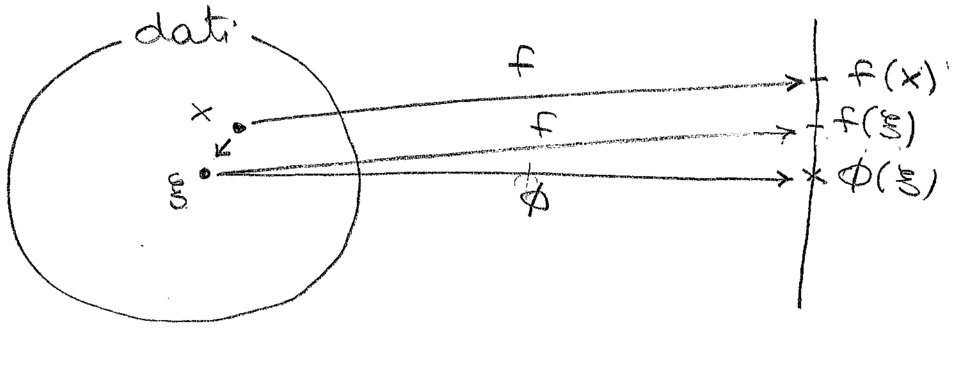
Es: $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $F(a)\,F(b) < 0$, un solo zero in $[a,b]$, α.

Si approssima

$$x \to (F, [a,b]) \xrightarrow{\text{bisezione}\ (f)} z \ (\approx \alpha)$$

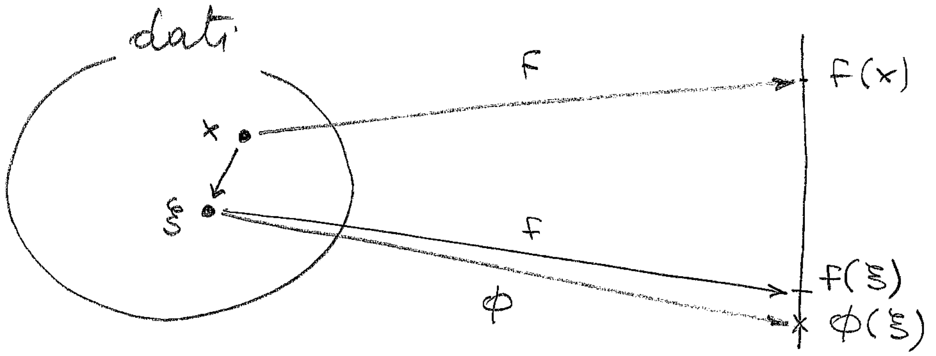
con

$$\xi \to (\Gamma, [a', b']) \xrightarrow{\text{BISEZIONE}\ (\phi)} \theta$$



$\Gamma = \phi_1$

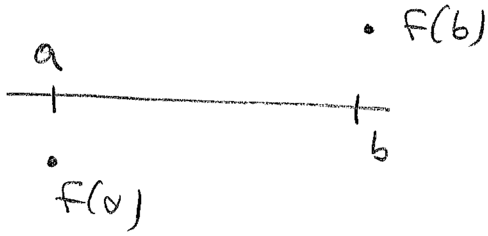
$T = \phi_2$



Misurando gli errori in senso assoluto...

- ϕ è un'approx <u>STABILE</u> di f (BISEZIONE si comporta $\approx$ bisezioni)
- il calcolo dello zero di F in $[a,b]$ è <u>NON ben condizionato</u>.

<u>TEO</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$



t.c.
- $f(a) < \delta$, $f(b) > \delta$
- $f \in C^1$ su $[a,b]$ con $f' > 0$ $\left(m = \min_{[a,b]} f'(x)\right)$

$\Rightarrow \exists!\, \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = 0$

e $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

t.c. $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - g(x)| < \delta$

<u>Allora</u>:
- $\exists \beta \in [a,b]$ t.c. $g(\beta) = 0$
- $f(\beta) - \cancel{f(\alpha)} = f'(y)(\beta - \alpha)$

  con y tra α e β (Teo di Lagrange)

$$\Rightarrow \quad |\beta - \alpha| = \left| \frac{f(\beta)}{f'(y)} \right| < \frac{\delta}{m}$$

$$\Big[\, |f(\beta)| = |f(\beta) - g(\beta)| < \delta \,\Big]$$

---

ovvero: distanza (zero f, zero g)

$< \frac{1}{m}$ distanza (f, g)

"numero di condizionam"

<u>Es</u>: Se ip non verificate ...

- $f(x) = x^2, \quad \alpha = 0 \; : \; \forall \delta > 0, \quad f + \delta$ NON ha zeri !

- $f(x) = (x-2)^{13}, \quad \alpha = 2, \quad f'(2) = 0$

  $\delta = 10^{-13}, \quad (f - \delta)(x) = 0$ per $x = 2 + \frac{1}{10}$

  ovvero: $\boxed{\begin{aligned} &\text{dist (zero f, zero g)} \\ &\qquad = 10^{12} \text{ dist } (f, g) \end{aligned}}$