CN #6,7 / 11 marzo 2013 / C43

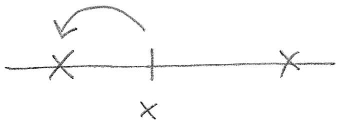
2) come il calcolatore utilizza gli elementi di $F(\beta,m)$ ...

... per <u>APPROSSIMARE</u> numeri reali

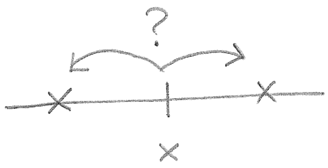
- funzione ARROTONDATO $rd : \mathbb{R} \to F(\beta,m)$

<u>def</u>: $\forall x \in \mathbb{R},\ rd(x) = \dots$

... l'elemento di $F(\beta,m)$ più vicino ad x



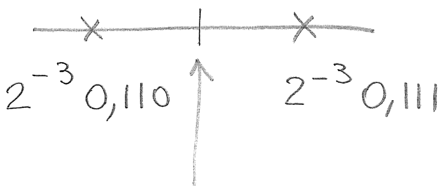
o, se c'è ambiguità, quello dei due che ha frazione che termina con 0



$(\beta = 2)$

<u>Es</u>: $F(2,3)$, $x = \frac{1}{10}$, $b = -3$, $g = 0,\overline{1100}$

elem di $F(2,3)$ <u>adiacenti</u> ad x



punto medio $= 2^{-3}\,0,1101$ $> x$ $\Rightarrow$ $rd(x) = 2^{-3}\,0,110$

Oss Se β pari e $m \geq 2$ allora: se l'ultima cifra della frazione di $\xi \in F(\beta, m)$ è PARI (rispett. DISPARI), l'ultima cifra della frazione del successore di ξ è DISPARI (rispett. PARI).

se β dispari non è vero!

Es: elem consecutivi in $F(3,2)$ sono

$3^0\ 0,10$ pari

$3^0\ 0,11$ dispari

$3^0\ 0,12$ pari

$3^0\ 0,20$ PARI!

- rd non è una funzione che il calcolatore mette a disposizione dell'utilizzatore, ma è indispensabile per capire come...

1) il calcolatore "legge" i numeri reali
2) il calcolatore fa operazioni sugli elementi di $F(\beta, m)$.

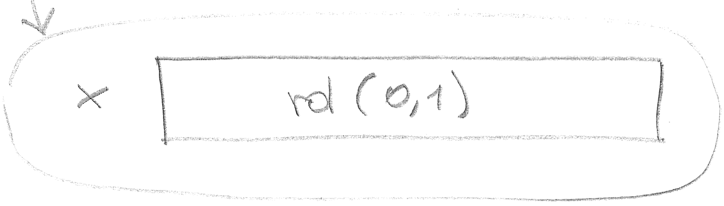
Es 1: $> x = 0{,}1$ (comando Scilab)

effetto...

a) se non esiste già, viene creata una variabile di nome x

b) alla variabile viene assegnato il valore

$\mathrm{rd}(0{,}1) \in F(2,53)$



$$\boxed{\text{Il calcolatore APPROSSIMA il numero reale con il suo arrotondato in } F(\beta,m)}$$

Pb: che errore viene commesso?

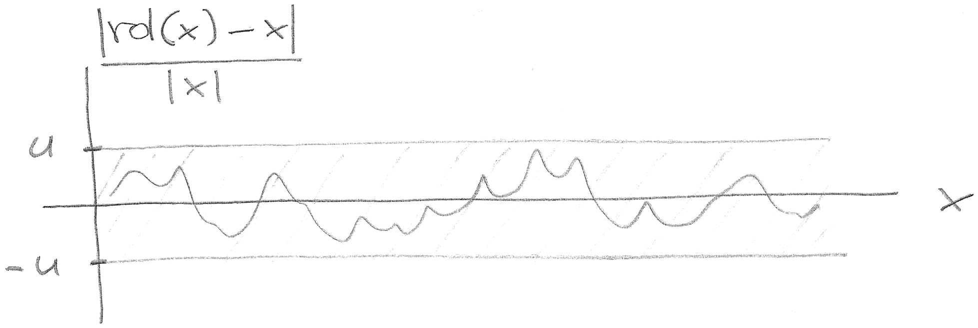
Soluzione:

Teo: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $\dfrac{|\mathrm{rd}(x) - x|}{|x|} \leq \dfrac{1}{2}\beta^{1-m} \equiv u$

PRECISIONE di MACCHINA

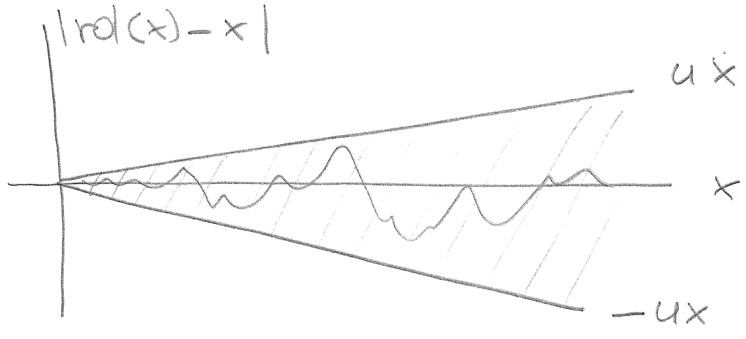
Oss:

- La stima è uniforme nel senso che la quantità che limita l'errore è indipendente da x (dipende solo dai parametri che definiscono $F(\beta, m)$)



- in $F(2,53)$ è $u = \frac{1}{2} 2^{1-53} = 2^{-53} \simeq 1.11 \, 10^{-16}$
- l'errore considerato è quello RELATIVO; per l'errore ASSOLUTO si ottiene la stima (non uniforme!):

$$|rd(x) - x| \leq u|x| \quad (\text{vale } \forall x \in \mathbb{R})$$



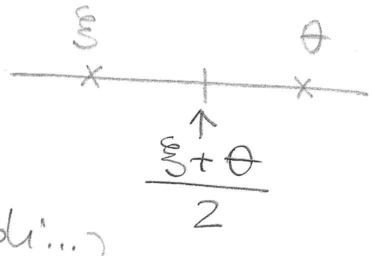
Questo accade per come sono distribuiti gli elementi di $F(\beta, m)$. Questi ultimi sono pensati appositamente per ottenere la stima uniforme dell'errore relativo.

(Nota: per i numeri in virgola fissa accade l'opposto: la stima dell'errore assoluto è uniforme, quella dell'errore relativo no.)

Es (2): ξ elem positivo di $F(2,53)$

θ successore di ξ $\quad (\Rightarrow \theta \in F(2,53))$

- $\frac{1}{2}\xi \in F(2,53)$, $\frac{1}{2}\theta \in F(2,53)$
- $\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\theta \notin F(2,53)$



Si ha:

$$> c = 1/2 + \underbrace{\text{nearfloat("succ", 1)}}_{\text{il successore di...}}/2$$

c = 1

> c == 1 "c è uguale a 1 ?"

ans = T

variabile "di appoggio" che "contiene la risposta"

In Scilab (nel calcolatore) si ha:

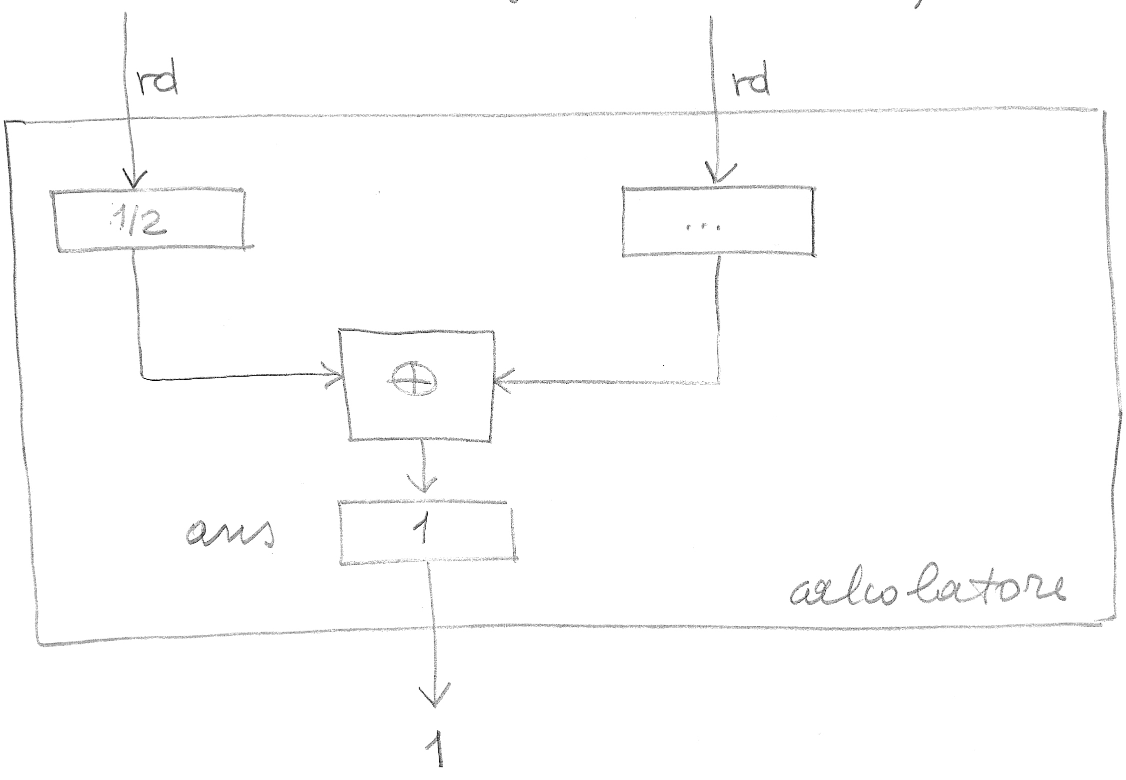
$\forall\ \xi_1, \xi_2 \in F(\beta, m)$

$$\xi_1 \oplus \xi_2 = rd(\underbrace{\xi_1 + \xi_2}_{\text{somma "esatta"}})$$

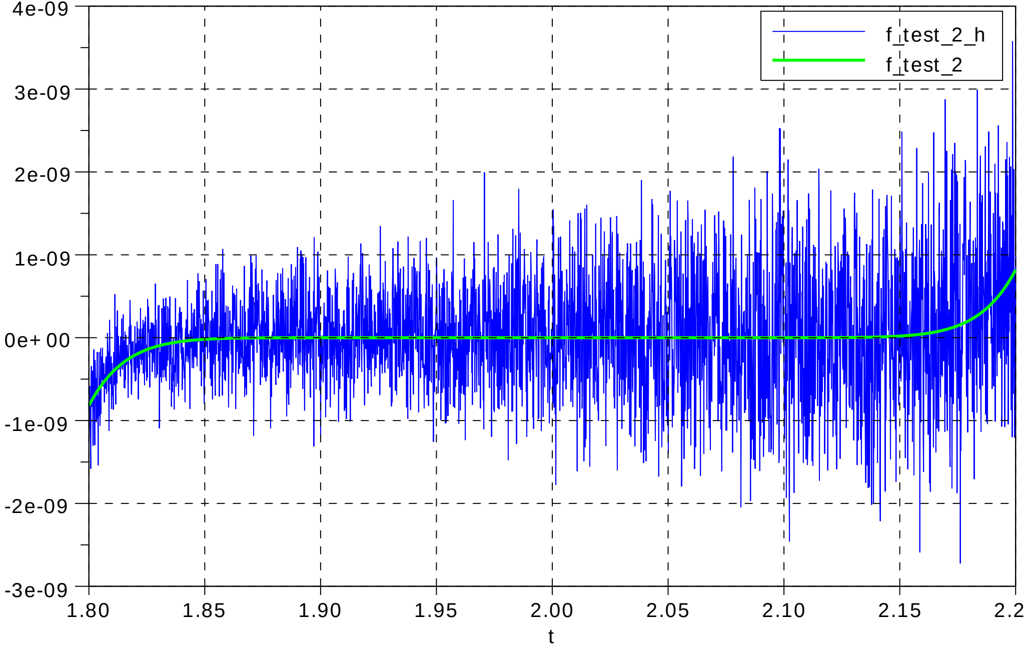
"pseudo somma"
si utilizza un simbolo
non usuale per chiarezza.

e quello che accade è:

1/2 + nearfloat("succ",1)/2



Es. Nell' Es finale della lez precedente, si utilizzano due sequenze diverse di op per calcolare i valori del polinomio $(x-2)^{13}$. Le due sequenze sono equivalenti IN $\mathbb{R}$ (ovvero "in teoria") ma NON lo sono operando in $F(2,53)$ (ovvero "con il calcolatore"), come evidente dal grafico allegato (in cui f_test_2 è relativo al calcolo dei valori con $(x-2)^{13}$ e f_test_2_h con horner...). Dunque il comportamento del calcolatore è una ragionevole conseguenza dell' aver applicato il metodo di bisezione a DUE FUNZIONI DIVERSE.



4e-09
3e-09
2e-09
1e-09
0e+ 00
-1e-09
-2e-09
-3e-09
1.80
1.85
1.90
1.95
2.00
2.05
2.10
2.15
2.20
t
f_test_2_h
f_test_2