CN #1,2 / 4 marzo 2013 / C43

- Pagina web: ...
- Programma del corso: + ARITMETICA del calcolatore

  1) ZERI di funzioni (es: $f(x)=0$)
  2) SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI (es: $Ax=b$)
     → metodi DIRETTI (fattorizz di A ...)
     → metodi ITERATIVI (matrici sparse)
  3) EQUAZIONI DIFFERENZIALI (es: $\ddot{x} = f(\dot{x}, x)$)

$\boxed{1}$ ZERI di funzioni & ARITMETICA del calcolatore

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Pb: decidere se $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\alpha)=0$

"ZERO di f"

ed, eventualm, determinarlo

TEO (esistenza degli zeri)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua, t.c. $f(a)\,f(b) < 0$

intervallo limitato

$\Rightarrow \exists\, \alpha \in (a,b)$ t.c. $f(\alpha)=0$

- Metodo di BISEZIONE

Idea: utilizza il Teo di esistenza degli zeri per ottenere una succes di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ t.c.

- $\forall k$, $\exists$ zero di f in I_k
- $I_{k+1} \subset I_k$
- $\lim_{k \to \infty} \text{mis}\, I_k = 0$

descrizione del METODO di BISEZIONE

dati: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $f(a)\,f(b) < 0$

- $a_0 = a$; $b_0 = b$; $I_0 = [a_0, b_0]$; $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$;
- per $k = 1, 2, 3, \ldots$ ripeti:

  se $f(x_{k-1}) = 0$ allora: STOP, altrimenti

  - se $f(x_{k-1})\,f(b_{k-1}) < 0$ allora: $a_k = x_{k-1}$, $b_k = b_{k-1}$;
  - se $f(a_{k-1})\,f(x_{k-1}) < 0$ allora: $a_k = a_{k-1}$, $b_k = x_{k-1}$;
  - $I_k = [a_k, b_k]$; $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$;

uscita: quando un opportuno criterio d'arresto è verificato: x_k (pto medio dell'ultimo intervallo determinato)

Oss: • $\text{mis } I_k = b_k - a_k = \dfrac{\text{mis } I_{k-1}}{2^1} = \dfrac{\text{mis } I_{k-2}}{2^2} = \ldots$

$$\ldots = \frac{\text{mis } I_0}{2^k} \Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} \text{mis } I_k = 0}$$

• SE f continua allora: $\forall k$, I_k contiene uno zero di f e

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha \quad \text{t.c. } f(\alpha)=0}$$

CRITERIO di ARRESTO (necessario: non è possibile costruire tutta una successione in tempo finito)

• di "tipo ASSOLUTO":

dato δ reale positivo...

$$\ldots \boxed{\text{se } \text{mis } I_k < \delta \text{ allora STOP}}$$

1) $\text{mis } I_k = b_k - a_k$ "è calcolabile"
2) disuguaglianza certamente verificata dopo un numero finito di iterazioni...

3) SE f continua:

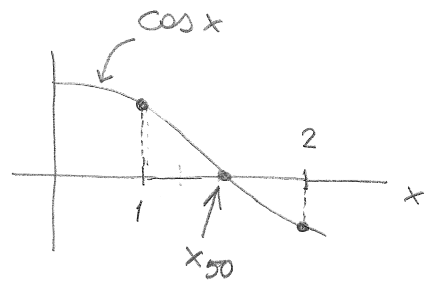
- $\exists\, \alpha \in I_k$ zero di f
- $|x_k - \alpha| \le \dfrac{\text{mis } I_k}{2} < \dfrac{\delta}{2}$

dunque: si ottiene un'approx di α (utilizzando x_k) con $\boxed{\text{errore assoluto} < \dfrac{\delta}{2}}$

Es: $f(x) = \cos x$ (continua!)

$I_0 = [1, 2]$

$\delta = 10^{-15}$



Si ottiene (utilizz SCILAB), dopo 50 iterazioni

$$x_{50} = 1{,}5707\ldots$$

$$\text{mis } I_{50} \approx 8.88\ 10^{-16}$$

Oss: "costo" del calcolo di $x_{50} \approx 50 \times$ (costo 1 it)

$$\text{mis } I_k = \frac{\text{mis } I_0}{2^k} < \delta \iff k > \log_2 \frac{\text{mis } I_0}{\delta}$$

Es: $f(x) = \cos x$, $I_0 = [1,2]$, $\delta = 10^{-16}$

dovrei ottenere la stima di $\left\lceil \log_2 \frac{1}{10^{-16}} \right\rceil = 54$ iterazioni ma...

... dopo 60, 80, 100 it ho $\text{mis } I_{60} = \text{mis } I_{80} = \text{mis } I_{100} \approx 2{,}22\ 10^{-16}$!!!

Per capire il pb, occorre indagare l'aritm del calcolatore.