Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; utilizz fatt QR di A per determ soluz di $Ax = b$ nel senso dei mq

Sol: eq. normali $\sim$ $Tx = Q^T b$

- $Q^T b = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \rightarrow x_2 = 2/3$, $x_1 = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2}/3}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Es: $P_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

determ x che rende min $F(x_1, x_2) = d(x, P_1)^2 + d(x, P_2)^2 + d(x, P_3)^2$

Sol: ... $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

- int fisica: config di equilibrio di un p.to mobile nel piano collegato da molle con P_1, P_2, P_3 ...

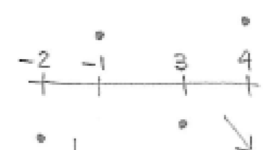
Es (zeri di funzioni):

Sia $h(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$;

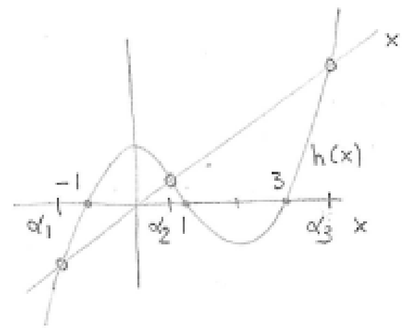
- determ il numero di p. uniti di h e separarli;
- per ciascuno dei p. uniti, decidere se il m. it def da h sia utilizzabile per l'approssimazione;
- sia $F(x) = h(x) - x$; per ciascuno zero di F (coincidente con un p.to unito di h...) decidere se il m. di Newton sia utilizzabile per l'approssimazione.

- Graficamente:

$F(x) = h(x) - x$



$\alpha_1 \in (-2, -1)$ $\qquad$ $\alpha_3 \in (3, 4)$



3 p.ti uniti:

$\alpha_1 < -1$

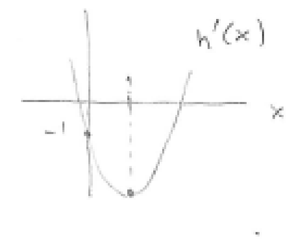
$\alpha_2 \in (0, 1)$

$\alpha_3 > 3$

- dal grafico: $h'(\alpha_1) > 1 \Rightarrow$ metodo NON utilizz

  $h'(\alpha_3) > 1 \Rightarrow$ " " "

$h'(x) = [(x^2-1)(x-3)]' = (x^3 - 3x^2 - x + 3)' = 3x^2 - 6x - 1$



$h''(x) = 6x - 6$

$h'(1) = -4$

$\forall x \in (0,1)$, $h'(x) < -1 \Rightarrow h'(\alpha_2) < -1$

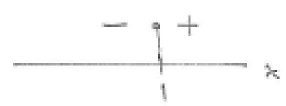
$\Rightarrow$ metodo NON utilizz.

- $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F'(\alpha_1) = h'(\alpha_1) - 1 > 0 \Rightarrow$ Newt utilizzabile!

  $F'(\alpha_2) = h'(\alpha_2) - 1 < 0 \Rightarrow$ Newt utilizz!

  $F'(\alpha_3) = h'(\alpha_3) - 1 > 0 \Rightarrow$ Newt utilizz!

Oss: $F''(x) = h''(x) = 6x - 6$



$\Rightarrow F''(\alpha_1) < 0$, $F''(\alpha_2) < 0$, $F''(\alpha_3) > 0$ $\;\Big|\;$ è utilizz il criterio di scelta del p.to iniziale

Es (interpolazione): Si vuole det il grafico di $f(x) = \text{sen}\, x^2$ su $[-10, 10]$, con err assoluto $\leq 1/80$, utilizz l'istr plot $(x, f(x))$ con suddiv uniforme dell'int. Determ un numero suff di sottointervalli.

- $x = (x_1, \dots, x_n)$ con $x_j = -10 + \frac{20}{n-1}(j-1)$, $j = 1, \dots, n$

  dobbiamo scegliere n che garantisce $e(f) \leq \frac{1}{80}$

  (si ricordi che plot (x,y) disegna il grafico dell'unica f cont lin a tratti che int i dati $(x_1,y_1), \dots, (x_n, y_n)$)

- $f \in \mathcal{C}^2([-10,10], \mathbb{R})$, $e(f) \leq \frac{M_2}{8} h^2$

  con $M_2 = \max\limits_{[-10,10]} |f''(x)|$, $h = \frac{20}{n}$

- $f'(x) = 2x \cos x^2$, $f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \,\text{sen}\, x^2$

  $|f''(x)| \leq 2 + 4x^2 \Rightarrow M_2 \leq 402$

- cerco h t.c.: $\frac{402}{8} h^2 \leq \frac{1}{80} \sim h^2 \leq \frac{1}{4020} \sim h \leq \frac{1}{63{,}4\dots}$

- valore di h suff: $\frac{1}{64} \Rightarrow \frac{20}{n-1} = \frac{1}{64} \sim \boxed{n = 64 \cdot 20 + 1 = 1281}$

Oss.: sin(x^2) $= rd\left(\text{sen}\left(rd(\xi^2)\right)\right)$, $\xi = rd(x)$

$$\boxed{x \longrightarrow \xi = rd(x) \longrightarrow \xi \otimes \xi = rd(\xi^2) \longrightarrow \sin(\xi \otimes \xi) = rd\left[\text{sen}\left(rd(\xi^2)\right)\right]}$$

- $\xi = (1+\varepsilon_1)\, x$, $|\varepsilon_1| \leq u$

- $rd(\xi^2) = (1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_1)^2 x^2 = (1+\theta_3)\, x^2$

  $\theta_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \Rightarrow |\theta_3| \leq 3u + \dots \approx 3u$

- $\text{sen}\left((1+\theta_3)\, x^2\right) = \text{sen}\, x^2 + \delta$

  $\delta = \text{sen}\left((1+\theta_3)x^2\right) - \text{sen}\, x^2 \approx (\cos x^2)\, \theta_3 x^2$

  $$\boxed{f(y+h) \approx f(y) + f'(y)\, h}$$

  $\Rightarrow |\delta| \leq 3x^2 u + \dots \leq 300\, u \; \boxed{\ll 1/80}$