def (migliore appross in spazi con p s):

- V sp vett su $\mathbb{R}$ con p s; $\forall v \in V$, $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$
- W ssv di V con $\dim W < +\infty$
- $v \in V$

$w \in W$ è una migliore appross di v in W se:
$\forall w' \in W$, $\|v - w\| \leq \|v - w'\|$

Oss: def equivalente:
$\forall w' \in W$, $\|v - w\|^2 \leq \|v - w'\|^2$

TEO: V, W, v come nella def; esiste una sola migliore appross di v in W: la proiez ortogonale di v su W.

Oss: v^* è pr ort di v su W significa $v - v^* \perp W$
ovvero: $\boxed{\forall w \in W, \ (v - v^*) \cdot w = 0}$.

dim: v^* pr ort di v su W, $w' \in W$:
$$\|v - w'\|^2 = \|\underbrace{v - v^*}_{\perp W} + \underbrace{v^* - w'}_{\in W}\|^2 = \|v - v^*\|^2 + \|v^* - w'\|^2$$

Oss: $a \in W$, $b \perp W \Rightarrow \|a+b\|^2 = (a+b) \cdot (a+b)$
$= a \cdot a + \cancel{a \cdot b} + \cancel{b \cdot a} + b \cdot b = \|a\|^2 + \|b\|^2$
(Teo di Pitagora)

da cui:
- $\forall w' \in W$, $\|v - w'\|^2 \geq \|v - v^*\|^2$
- $\|v - w'\|^2 = \|v - v^*\|^2 \Leftrightarrow w' = v^*$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2{,}4 \end{bmatrix}$;

- $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico
- $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim W = 2$
- $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2{,}4 \end{bmatrix} = b$

la migliore appross di v in W è $v^* \in W$ tale che
$\forall w' \in W$, $\|v - v^*\|^2 \leq \|v - w'\|^2$

MA: $W = \{ Ax \in \mathbb{R}^3, \ x \in \mathbb{R}^2 \}$

dunque la condiz precedente equivale a

i coefficienti della migliore appross di v in W sono le $x^* \in \mathbb{R}^2$ tali che
$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\|b - Ax^*\|^2 \leq \|b - Ax\|^2$

ovvero le soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei m.q.

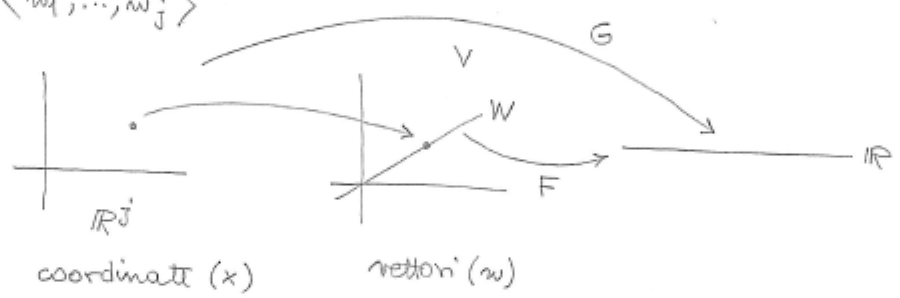
TEO $\Rightarrow$ esistono soluz di $Ax=b$ nel senso dei m.q;
- una sola se e solo se colonne di A lin indip
- infinite se colonne di A lin dip

Oss (versione analitica del pb dei minimi quadrati):

- V sp vett su $\mathbb{R}$ con ps, $v \in V$
- W ssv di V con $\dim W < +\infty$
- $F : W \to \mathbb{R}$ t.c. $F(w) = \| v - w \|^2$

(1) TEO $\Rightarrow$ la funz F ha minimo (assoluto) in v^* pr ort di v su W

(2) $W = \langle w_1, \dots, w_j \rangle$



$G : \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = F(x_1 w_1 + \dots + x_j w_j)$

- v^* minimo di F
- x^* t.c. $x_1^* w_1 + \dots + x_j^* w_j = v^* \Rightarrow x^*$ minimo di G

$$\left[x \neq x^* \Rightarrow G(x) = F(x_1 w_1 + \dots + x_j w_j) \geq F(v^*) = G(x^*) \right]$$

- SE $w_1, \dots, w_j$ BASE, x^* unico elem di $\mathbb{R}^j$ che rende minima G, ALTRIMENTI $\exists$ infiniti elem di $\mathbb{R}^j$ che ...

Oss: V, v come sopra, $W = \langle w_1, \dots, w_j \rangle$ s.s.v di V.

- v^* pr ort di v su $W \Leftrightarrow v - v^* \perp W$

  ovvero $\Leftrightarrow \forall s = 1, \dots, j$: $(v - v^*) \cdot w_s = 0$ cioè: $v^* \cdot w_s = v \cdot w_s$

- Le coord di v^* sono dunque individuate da:

  $a_1 w_1 + \dots + a_j w_j = v^* \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix}$ soluz del sist $\underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \cdot w_1 & \cdots & w_j \cdot w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ w_1 \cdot w_j & \cdots & w_j \cdot w_j \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} v \cdot w_1 \\ \vdots \\ v \cdot w_j \end{bmatrix}}_{\text{EQUAZIONI NORMALI}}$

  Oss: la matr del sist è SIMMETRICA.

Oss: $A = (a_1, \dots, a_j) \in \mathbb{R}^{n \times j}$, $n \geq j$, $b \in \mathbb{R}^n$

- $V = \mathbb{R}^n$ con ps canonico, $v = b$
- $W = \langle a_1, \dots, a_j \rangle \subset \mathbb{R}^n$
- l'elemento di W migliore approx di $v = b$ nel senso dei m.q. è la pr ort di b su W
- le coord della pr ort di b su W sono tutte le colonne soluz del sist delle eq normali:

$$(A^T A) x = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & \cdots & a_j \cdot a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 \cdot a_j & \cdots & a_j \cdot a_j \end{bmatrix} \qquad A^T b = \begin{bmatrix} b \cdot a_1 \\ \vdots \\ b \cdot a_j \end{bmatrix}$$

RICORDARE che: $a, b \in \mathbb{R}^n$

$a \cdot b = b^T a$

- la matr $A^T A$ è simmetrica semidef positiva ($\forall v \in \mathbb{R}^j$, $A^T A v \cdot v \geq 0$)
- SE colonne di A lin indip ALLORA è def positiva ($\Rightarrow$ invertibili)

Es: $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

- eq normali
- soluz delle eq normali
- migliore approx di v in W nel senso dei m.q

(Sol: ...)

Es: V, v come nell'Es precedente; $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

- eq normali e soluz
- migliore approx ...