

(B) ricostruire con  $f$  cont. lin. a tratti:

$$|r(\delta)| = \left| \delta_0 s_0(t) + \dots + \delta_k s_k(t) \right|$$

base di  $s \dots$

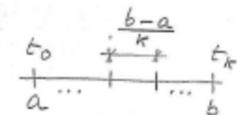
$$\leq |\delta_0| |s_0(t)| + \dots + |\delta_k| |s_k(t)| \leq \max\{|\delta_0|, \dots, |\delta_k|\}$$

$|s_0(t)| + \dots + |s_k(t)| = s_0(t) + \dots + s_k(t) = 1$

OVVERO: Nel caso di ricostruzione con int. polinomiali il condiz. è tanto peggiore quanto più  $k$  è grande; nel caso di ricostruzione con  $f$  cont. lin. a tratti il condiz. è sempre buono.

E1 (appross. numerica di integrali):

dati:  $[a, b] \subset \mathbb{R}; f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$   
 determinare  $\int_a^b f(t) dt$       $\left[ \text{Es: } \int_0^1 e^{-t^2} dt \right]$

- $k$  int.  $\geq 1$ ,  $x_j = a + \frac{b-a}{k} j$ ,  $j = 0, \dots, k$  
- $r$  di ricostruzione con  $f$  cont. lin. a tratti su  $I_1 = [x_0, x_1], \dots, I_k = [x_{k-1}, x_k]$
- $s(x) = r(c(f))(x) = f(x_0) s_0(x) + \dots + f(x_k) s_k(x)$
- $e(f) = \max_{[a, b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{M_2}{8} \left(\frac{b-a}{k}\right)^2$

$$I = \int_a^b f(t) dt, \quad J_k = \int_a^b s(t) dt$$

$$\Rightarrow |I - J_k| = \left| \int_a^b (f(t) - s(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - s(t)| dt$$

$$\leq \int_a^b \max_{[a, b]} |f(t) - s(t)| dt = (b-a) \max_{[a, b]} |f(x) - s(x)|$$

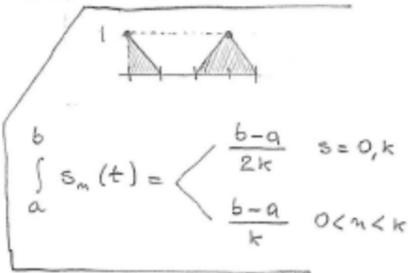
$$\leq \frac{M_2}{8} \frac{(b-a)^3}{k^2}$$

Oss:  $\forall \delta > 0, \exists k$  t.c.  $|I - J_k| < \delta$

$$J_k = \int_a^b s(t) dt = \int_a^b (f(x_0) s_0(t) + \dots + f(x_k) s_k(t)) dt$$

$$= f(x_0) \int_a^b s_0(t) dt + \dots + f(x_k) \int_a^b s_k(t) dt$$

$$= \frac{b-a}{k} \left[ \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + \frac{1}{2} f(x_k) \right]$$

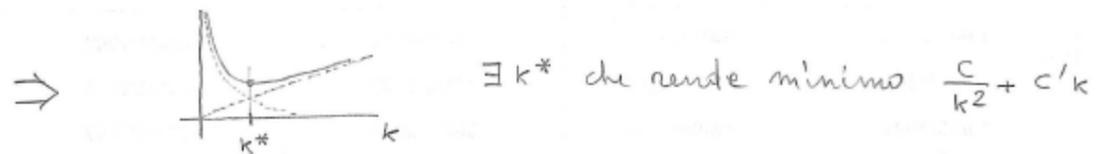


calcolo "elementare"!

• Si approssima  $I$  con  $J_k$ , scegliendo  $k$  sufficientemente grande.

Oss:  $\phi_k$  funz utilizz dal calc per appross  $J_k$ ;

- $|I - \phi_k| = |I - J_k + J_k - \phi_k| \leq \underbrace{|I - J_k|}_{\approx \Sigma} + \underbrace{|J_k - \phi_k|}_{\approx \oplus \dots \oplus}$
- $|I - J_k| = \frac{C}{k^2}$
- $|J_k - \phi_k| = C/k$  se "tutto va bene"



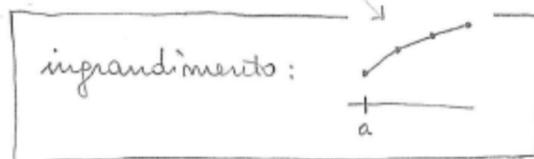
Es (grafico di f):

dati:  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$

determ il grafico di f su  $[a, b]$ .

- $k$  int  $\geq 1$ ,  $x_j = a + \frac{b-a}{k} j$ ,  $j=0, \dots, k$ ; r f di ricostr con f conti...
- $x = (x_0, \dots, x_k)^T$ ,  $F = c(f) = (f(x_0), \dots, f(x_k))^T$
- $>$  plot  $(x, F)$

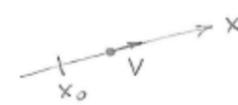
produce:  grafico di  $r(c(f))$



Pb: come scegliere k?

#### 4 APPROSSIMAZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI

Es: punto materiale che si muove di MOTO UNIFORME su una retta, con velocita'  $V$  e posizione  $x_0$  per  $t=0$



Pb: risultati di misure...

- $x(1) = 1$
  - $x(2) = 1,5$
  - $x(4) = 2,4$
- determ  $V$  e  $x_0$

Soluz: moto uniforme  $\Rightarrow x(t) = x_0 + Vt \in \langle 1, t \rangle$

Cerchiamo  $\alpha_0, \alpha_1$  t.c.  $\alpha_0 + \alpha_1 t$  int i dati...

$\Rightarrow \alpha_0, \alpha_1$  soluz di:  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2,4 \end{bmatrix}$  ( $Ax = b$ ) SISTEMA INCOMPATIBILE

- Ragionevole perche' dati ottenuti da misure...
- RIFIEGO: cerco  $\alpha_0, \alpha_1$  che "minimizze l'errore" ...  $Ax = b$

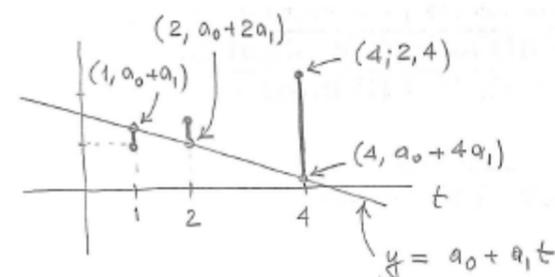
def:  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n > m$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ;

$v \in \mathbb{R}^m$  SOLUZIONE di  $Ax = b$  NEL SENSO DEI MINIMI QUADRATI se  $\forall w \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|Aw - b\|_2 \geq \|Av - b\|_2$  (ovvero:  $\|\dots\|_2^2 \geq \|\dots\|_2^2$ )

Oss:  $x^* \in \mathbb{R}^m$  SOLUZIONE di  $Ax = b$  significa  $Ax^* - b = 0$ ;

dunque: SOLUZIONE  $\Rightarrow$  SOLUZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI

Es (continua, int geom dell'errore  $Ax = b$ )



- le componenti del vettore  $Ax - b$  sono, a parte il segno, le lunghezze dei segmenti marcati in figura; tra tutte le rette si cercano quelle che rendono minime le somme dei quadrati delle lunghezze.