Es: $[a,b]=[0,2\pi]$; $f(t)=\operatorname{sen}\omega t$, $\omega>0$

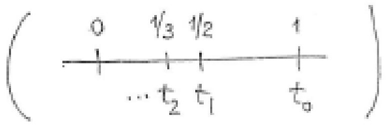
- $\forall j$ int positivo, $\max\{\,|f^{(j)}(t)|\,,\ t\in[0,2\pi]\} = \omega^j$
- $\forall \tau\in[0,2\pi]$, $|t-\tau|\le 2\pi$

$$\Rightarrow\ e(f)\le \frac{\omega^{k+1}}{(k+1)!}(2\pi)^{k+1} \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty}\frac{(2\pi\omega)^{k+1}}{(k+1)!}=0$$

OVVERO: l'errore di ricostruz può essere reso arb piccolo scegliendo suff grande il # di ist di campionam; l'unico vincolo sugli ist di camp è che siano distinti.

Es: $[a,b]=[0,1]$; $f(t)=\begin{cases} t\operatorname{sen}\frac{\pi}{t} & \text{per } t\neq 0\\ 0 & \text{per } t=0\end{cases}$

- $t_j=\frac{1}{j+1}$, $j=0,1,2,\dots$



- $f(t_j)=\frac{1}{j+1}\operatorname{sen}[(j+1)\pi]=0 \ \Rightarrow$ dati da interp: $(t_0,0),(t_1,0),\dots$

$\Rightarrow\ \forall f$ di ricostr r : $r(c(f))=0$.

Q.di: $e(f)=\max\{\,|f(t)|\,,\ t\in[0,1]\}>0$ INDIP da k

OVVERO: $\exists$ funz e strategie di scelta degli ist di camp t.c. $\lim_{k\to\infty} e(f)\neq 0$.

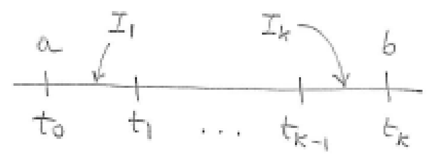
Oss: in generale...

- se $\max\{\,|f^{(j)}(t)|\,,\ t\in[a,b]\}$ non cresce troppo rapidam con j (Es: $\dots < L^j$, $L>0$) allora $\lim_{k\to\infty} e(f)=0$ con qualsiasi strategia di scelta dei c.
- $\forall f$ continua, $\exists$ strategia di scelta dei t_j t.c. $\lim_{k\to\infty} e(f)=0$ [... ma QUALE ?];
- $\forall$ strategia di scelta dei t_j, $\exists f$ continua t.c. $\lim_{k\to\infty} e(f)\neq 0$.

$\Rightarrow$ ricostr con int polinomiale soddisf solo per POCHE funzioni molto regolari.

ALTERNATIVA: ricostr con funzioni continue lineari a tratti

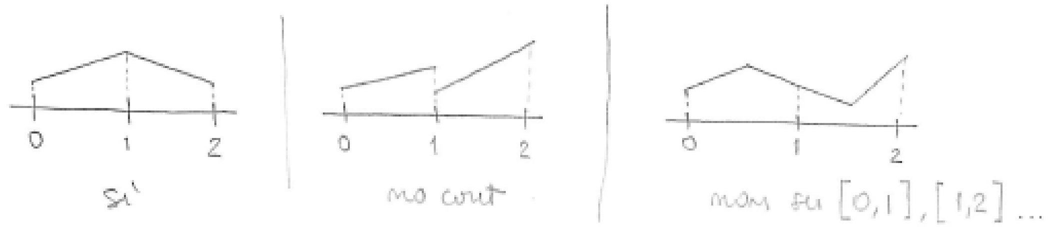
def (f lin a tratti): $a<b\in\mathbb{R}$, $a=t_0<t_1<\dots<t_k=b$,
$I_j=[t_{j-1},t_j]$
$j=1,\dots,k$



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è una f CONTINUA LINEARE A TRATTI (su $I_1,\dots,I_k$) $\boxed{\text{SE}}$

- f è continua su $[a,b]$
- $\forall j=1,\dots,k\ \exists\, p_j\in P_1(\mathbb{R})$ t.c. $f=p_j$ su I_j

Es:



Oss: $[a,b] \subset \mathbb{R}$; $t_0,\dots,t_k \in [a,b]$ distinti...; $I_1,\dots,I_k$ ...

$S = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue lin a tratti su $I_1,\dots,I_k \}$

(A) S è sottosp vett di $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (dim ...)

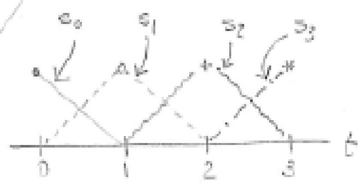
(B) $\forall\, y_0,\dots,y_k \in \mathbb{R}$, $\exists$ un solo elem di S che interpola i dati $(t_0,y_0),\dots,(t_k,y_k)$

[dim: $\forall j\ \exists!\ p_j \in P_1(\mathbb{R})$ che interpola $(t_{j-1},y_{j-1}),(t_j,y_j)$, e la f risulta cont su $[a,b]$.]

(C) $s_0,\dots,s_k \in S$ t.c. $s_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$

- $s_0,\dots,s_k$ sono base di S (dim ...)
- $\dim S = k+1$

Es: $[0,3]$; $I_1=[0,1]$, $I_2=[1,2]$, $I_3=[2,3]$



- determ $\sigma \in S$ che int i dati $(0,2),(1,-6),(2,0),(3,-1)$.

Oss (ricostr mediante f cont lin a tratti)

$[a,b]$, $a=t_0,\dots,t_k=b$, S f cont lin a tratti su $I_1=[t_0,t_1],\dots$

- $r : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ t.c. $r: \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \mapsto$ l'elem di S che int $(t_0,y_0)\dots(t_k,y_k)$

(1) r è f di ricostr rel a c (dim ...)