• COSTO

def (costo aritmetico): # pseudo-op eseguite per portare a termine la proc.

Oss: (1) confronti a "costo zero": ragionevole se pochi
(Es: $x \in \mathbb{R}^n$, per calcolare $\|x\|_\infty$ # confronti non trasc!)

(2) costo di ciascuna pseudo-op indip da operandi (FALSO se esponenti non limitato! MA nei calc si ha $-1021 \le b \le 1024$ ...)

Es: ① $\phi_1(a,b) = a_1 \overset{1}{\otimes} b_1 \overset{n+1}{\oplus} \cdots \overset{2n-1}{\oplus} a_n \overset{n}{\otimes} b_n \approx a^T b$

costo $\phi_1 = n P + (n-1) S = (2n-1)$ flops $\approx 2n$ flops

② $\phi_2(A,b) = \left(\phi_1(\hat{a}_1, b), \dots, \phi_1(\hat{a}_n, b) \right)^T \approx A b$ [$\hat{a}_k$: k-esima riga di A]

costo $\phi_2 = n^2 P + n(n-1) S = (2n^2 - n)$ flops $\approx 2n^2$ flops

Oss: Se A è tr si ha ($\xi \otimes 0 = 0$, $\xi \oplus 0 = \xi$):

costo 1ª componente = 1P + 0S

" 2ª " = 2P + 1S

etc ... costo $\phi_2^{tr} = \frac{n(n+1)}{2} P + \frac{(n-1)n}{2} S = n^2$ flops

③ $\phi_3(T,c) = \widehat{SI}(T,c) \approx SI(T,c)$

costo $\phi_3 = n D + \frac{n(n-1)}{2} (P+S) = n^2$ flops

Oss: risolvere un sist di eq con matrice tr
costa tanto quanto verificare se x è soluzione ...

④ $\phi_4(A) = \widehat{EG}(A) \approx EG(A)$

costo $\phi_4 = \frac{n^2+n}{2} D + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} (P+S)$

$= \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6}$ flops $\approx \frac{2}{3} n^3$

⑤ $\Phi_5(A,b)$ = soluz sist con $\widehat{EG}$ $\approx$ soluz sist con EG

costo ϕ_5 = costo ϕ_4 + 2 costo $\phi_3 \approx \frac{2}{3} n^3$

⑥ $\Phi_6(A) = \widehat{qr}(A) \approx qr(A)$

costo $\phi_6 \approx \frac{4}{3} n^3$

$\Rightarrow$ costo soluz sist con $\widehat{qr}$ $\approx \boxed{\frac{4}{3} n^3}$

Oss: la soluz con qr costa (circa) il doppio rispetto a quella con EG.

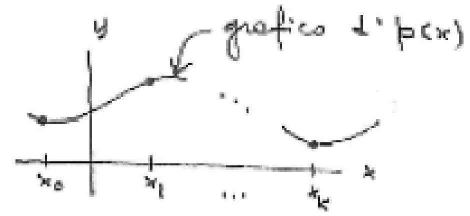
3 INTERPOLAZIONE

Pb (dell'interpolazione polinomiale):

dati
- k intero ≥ 0
- $P_k(\mathbb{R})$ = ins dei polin a coeff in $\mathbb{R}$, di grado $\le k$ (sottosp vett delle f continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$)
- $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, distinti
- $y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$

determ $p \in P_k(\mathbb{R})$ t.c. $p(x_0) = y_0, \dots, p(x_k) = y_k$
("che interpola i dati $(x_0,y_0), \dots, (x_k,y_k)$")

• int geometrica:



Assegnati k+1 punti — di coord $(x_0,y_0), \dots, (x_k,y_k)$ — determ $p \in P_k(\mathbb{R})$ il cui grafico contiene i punti.

Es: $k=2$, dati $(-1,0)$, $(0,1)$, $(2,-2)$

- $-x^2+6x+1$ non è soluz del Pb ...
- $P_2(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ;\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ RAPPRESENTAZ PARAMETRICA di $P_2(\mathbb{R})$

Riformulaz del Pb: cerco $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ t.c. il polin individuato verifichi le tre condiz

$$p(-1)=0, \quad p(0)=1, \quad p(2)=-2$$

OVVERO che risolvono il sist di eq lin:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Oss: a_0, a_1, a_2 soluzione del sistema
$\Updownarrow$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ soluzione del Pb di interp polin

Oss: $P_k(\mathbb{R}) = \langle q_0(x), \dots, q_k(x) \rangle$ (Ad es: $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle$)

cioè $P_k(\mathbb{R}) = \{ a_0 q_0(x) + \dots + a_k q_k(x) ;\ a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R} \}$

ALLORA $\alpha_0 q_0(x) + \dots + \alpha_k q_k(x)$ risolve il Pb di interp

$\Leftrightarrow$ $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)^T$ risolve il sist di eq. lineari

$$\begin{bmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \dots & q_k(x_0) \\ \vdots & & & \\ q_0(x_k) & q_1(x_k) & \dots & q_k(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$