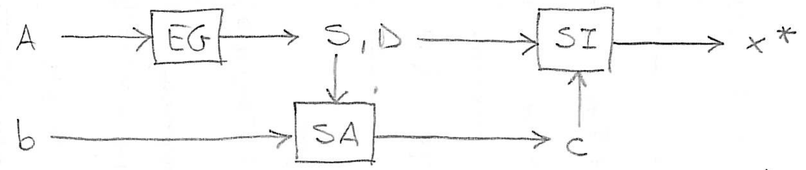
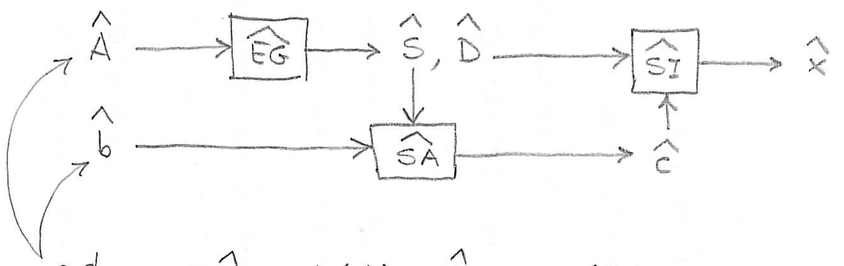
* STUDIO IN $\mathbb{M}$ *

Oss:



in $\mathbb{R}$

in $\mathbb{M}$



ad es: $\hat{A} = rd(A)$, $\hat{b} = rd(b)$

$\hat{x} = \widehat{SI}(\hat{D}, \hat{c})$, $x^* = SI(D, c)$; $\tilde{x} = SI(\hat{D}, \hat{c})$

$$\Rightarrow \frac{\|\hat{x} - x^*\|}{\|x^*\|} \le \underbrace{\frac{\|\hat{x} - \tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|}}_{\epsilon_a} \underbrace{\frac{\|\tilde{x}\|}{\|x^*\|}}_{\le \frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|x^*\|} + 1} + \underbrace{\frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|x^*\|}}_{\epsilon_d}$$

$$\le \epsilon_a (1 + \epsilon_d) + \epsilon_d = \epsilon_a + \epsilon_d + \epsilon_a \epsilon_d$$

$$\epsilon_D = \frac{\|\hat{D} - D\|}{\|D\|} \qquad \epsilon_c = \frac{\|\hat{c} - c\|}{\|c\|}$$

Supponendo ϵ_a piccolo...

TEO (condiz, I) + TEO (condiz, II) $\Rightarrow$

- $\epsilon_d \le c(D)\, \epsilon_c$ $\quad (\epsilon_D = 0)$
- $\hat{\epsilon}_d \le c(D)\, \epsilon_D$ $\quad (\epsilon_c = 0)$

$\Rightarrow$ occorre studiare $c(D)$!

Es: $\gamma \in (0,1)$, $A(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{-1}(\gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{bmatrix}$

- $c_\infty(A(\gamma)) = (1+\gamma)^2 < 4$ (numero di condiz basso)
- EG ... $S(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\gamma & 1 \end{bmatrix}$, $D(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & -1/\gamma \end{bmatrix}$
- $c_\infty(D(\gamma)) \ge \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow$ NON LIMITATO per $\gamma \in (0,1)$

$$= \underbrace{\max\{1+\gamma, \tfrac{1}{\gamma}\}}_{\ge \frac{1}{\gamma}} \underbrace{\max\{1 + \tfrac{1}{\gamma}, \gamma\}}_{\ge 1 + \frac{1}{\gamma} \ge \frac{1}{\gamma}}$$

ovvero... i sistemi $A(\gamma)x = b$ e $D(\gamma)x = c$ sono equivalenti MA non hanno le stesse proprietà di condizionamento !!

Oss: EGPP (EG con Pivoting Parziale)

"al passo k, si utilizza come pivot: $\max_{i \ge k} |a_{ik}^{(k)}|$"

Es (continua):

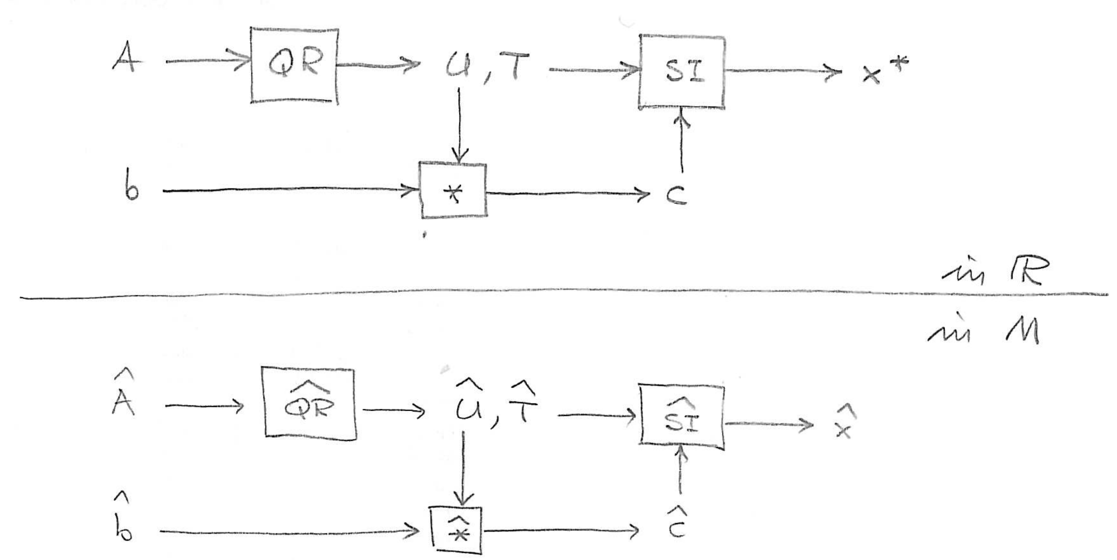
- EGPP ... $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $S(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$, $D(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

  con $c_\infty(D(\gamma)) = 1$

In generale, con EGPP si ottiene $\boxed{c(D) \le n\, 2^n\, c(A)}$

la matr D può avere condiz peggiore di A, ma non "arbitrariam peggiore".

Oss:



$\hat{x} = \widehat{SI}(\hat{T},\hat{c})$, $x^* = SI(T,c)$, $\tilde{x} = SI(\hat{T},\hat{c})$ etc

Teo condiz $\Rightarrow$ • $\epsilon_d \le c(T)\,\epsilon_T$ $(\epsilon_c = 0)$

• $\hat{\epsilon}_d \le c(T)\,\epsilon_c$ $(\epsilon_T = 0)$

$\epsilon_T = \dfrac{\|\hat{T} - T\|}{\|T\|}$

$\Rightarrow$ occorre studiare $c(T)$!

Oss: $(\mathbb{R}^n, N_2)$ • $T = U^T A \Rightarrow \|T\|_2 \le \|A\|_2$

• $T^{-1} = A^{-1} U \Rightarrow \|T^{-1}\|_2 \le \|A^{-1}\|_2$

$\Rightarrow c(T) \le c(A)$

Oss: U ortogonale $\Rightarrow \|U\|_2 = 1$ (dim...)

Oss: sussiste il seguente

TEO: $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ottenuto dalla procedura

(I) $(\hat{S}, \hat{D}) = \widehat{EG}(A)$

(II) $\hat{c} = \widehat{SA}(\hat{S}, b)$

(III) $\hat{x} = \widehat{SI}(\hat{D}, \hat{c})$

Allora: $\exists\, \delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- $\|\delta A\| \le n u \|\hat{S}\| \, \|\hat{D}\|$ (u precis di macch)
- $(A + \delta A)\hat{x} = b$

ovvero: $\hat{x}$ è la soluzione calcolata op in $\mathbb{R}$ di un sistema di eq ottenuto perturbando "poco" la matrice del sist originario.

Oss (int fisica): Se il sist $Ax = b$ ha origine fisica, i dati A e b sono affetti da errore; se $\delta A \approx$ errore di origine fisica, allora $\hat{x}$ è "fisicamente significativo".