• PROPRIETÀ delle NORME INDOTTE : $\mathbb{R}^n$, N

(I) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ v \in \mathbb{R}^n :\quad N(Av) \le \|A\|_N\, N(v)$

(dim: dalla def di norma indotta...)

(II) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} :\quad \|AB\|_N \le \|A\|_N\, \|B\|_N$

(ragionevole estensione della precedente)

(III) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- $\left\{ \dfrac{N(Av)}{N(v)},\ v \ne 0 \right\} = \left\{ N(Av),\ N(v) = 1 \right\}$
- $\|A\|_N = \max \left\{ N(Av),\ N(v)=1 \right\}$ (dim...)

  $\left(\Rightarrow \exists\, v_* \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \begin{cases} N(v_*) = 1 \\ N(Av_*) = \|A\|_N \end{cases} \right)$
- se A invertibile :

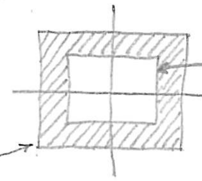
  $$\|A^{-1}\|_N = \left(\min \left\{ N(Av),\ N(v) = 1 \right\} \right)^{-1}$$

Es: • $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert ; $A^{-1}A = I \Rightarrow \begin{cases} \|A^{-1}\|_N \|A\|_N \ge 1 \\ \|A^{-1}\|_N \ge \|A\|_N^{-1} \end{cases}$

• $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert , $b \in \mathbb{R}^n$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax_* = b$

$$\Rightarrow \frac{\|b\|_N}{\|A\|_N} \le \|x_*\| \le \|A^{-1}\|_N \|b\|_N = \|A\|_N \|A^{-1}\|_N \frac{\|b\|_N}{\|A\|_N}$$

(Ad es, $\mathbb{R}^2$ con N_∞ :



$J_\infty\left(0, \dfrac{\|b\|_N}{\|A\|_N}\right)$

$J_\infty(0, \bullet)$)

• CONDIZIONAMENTO •

dati : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert , $b \in \mathbb{R}^n$

soluzione : $x_* \in \mathbb{R}^n : \quad Ax_* = b$

dati PERTURBATI : $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invert (ragionevole...)

$b' \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\delta_A = A' - A ,\quad \delta_b = b' - b \ :\ \text{PERTURBAZ}}$$

soluzione : $x'_* \in \mathbb{R}^n : \quad A' x'_* = b'$

Allora : $x'_* - x_* = (A + \delta_A)^{-1}(b + \delta_b) - A^{-1} b = F(A, b; \delta_A, \delta_b)$

$$\boxed{\text{Pb : studiare } F}$$

• CASO 1 : $\delta_A = 0$, $\delta_b \ne 0$

$x'_* = A^{-1}(b + \delta_b)$, $\quad x'_* - x_* = A^{-1}\delta_b$

ERRORE TRASM dai DATI...

$\Rightarrow \|x'_* - x'\| = \|A^{-1}\delta_b\|$; $\quad \boxed{\varepsilon_d = \dfrac{\|x'_* - x_*\|}{\|x_*\|}} = \dfrac{\|A^{-1}\delta_b\|}{\|A^{-1}b\|} \ldots$

$$\ldots \le \|A^{-1}\| \boxed{\frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}} \frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|} \le \|A^{-1}\| \|A\|\, \varepsilon_b$$

$= \varepsilon_b$ (ERRORE rel SUL DATO)

$A(A^{-1}b) = b \Rightarrow \|b\| \le \|A\| \|A^{-1}b\|$

$$\Rightarrow \frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|} \le \|A\|$$

def (numero di condiz di A): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invert

$$c_N(A) = \|A\|_N \|A^{-1}\|_N$$ numero di condiz di A (in norma N)

Teo (condiz, I): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, invert

- $\forall b \begin{cases} \in \mathbb{R}^n \\ \neq 0 \end{cases}$, $\forall \delta_b \in \mathbb{R}^n$: $\varepsilon_d \leq c(A)\, \varepsilon_b$

- $\exists b \begin{cases} \in \mathbb{R}^n \\ \neq 0 \end{cases}$, $\exists \delta_b \in \mathbb{R}^n$: $\varepsilon_d = c(A)\, \varepsilon_b$