

CARATTERIZZAZIONE matrici SDP

Oss: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, SDP. Allora la fatt LR di A è t.c.

- (I) $D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn}) S^T$
- (II) $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0 \Rightarrow \det A > 0$ (dim: ...)

Oss: A simmetrica. Se $(S, D) = \text{EG}(A)$ [EG è def in A] e $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0$ allora A è SDP.

(dim: ...)

TEO (caratt matrici SDP):

A simmetrica. SDP \Leftrightarrow EG def in A e $(S, D) = \text{EG}(A)$ con $d_{11} > 0, \dots, d_{nn} > 0$ ①

\Leftrightarrow $\det A[k] > 0$ per $k=1, \dots, n$ ② *

dim: SDP \Leftrightarrow ① segue dalle Oss precedenti;

SDP \Rightarrow ② da PROPRIETA' (I) e (II) Oss prec;

② \Rightarrow SDP perché ② \Rightarrow ① ...

Es: $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ t.c. $A(x) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & x & x \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}$

determi per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ risulta SDP

\Leftarrow $\exists L$ tr inf con $l_{kk} > 0, k=1, \dots, n$ t.c. $A = LL^T$ ③

dim: SDP \Rightarrow ③ da Oss (I) e poi $A = \underbrace{S \sqrt{\text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn})}}_L \sqrt{\dots} S^T$

③ \Rightarrow SDP dalle def ...

• COSA FARE se EG non def in A

Es (pivoting): $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

def: $P(i,j)$ è la matr di perm che scambia riga i con riga j

• $A^{(1)} = A$; $A^{(2)} = H_1 \overset{P_1}{\boxed{P(1,2)}} A^{(1)}$; $A^{(3)} = H_2 \overset{P_2}{\boxed{P(2,3)}} A^{(2)}$ è tr sup ...

... q.d.: $A^{(3)} = [H_2 P_2 H_1 P_1] A$

... ovvero: $A = [P_1^T H_1^{-1} P_2^T H_2^{-1}] A^{(3)}$

MA: [...] non è tr inf con 1 sulla diag! ⊕

• $P \stackrel{\text{def}}{=} P_2 P_1$ allora: $P[\dots]$ è tr inf con 1 sulla diag ... ⊕

• $S = P[\dots]$, $D = A^{(3)}$ è fatt LR di PA

• $A = P^T S D$

Es (per caso): verif ⊕ e ⊕

• $(P, S, D) = \text{EGP}(A)$