<u>Oss</u>: $k \in \{1,\dots,n-1\}$, $v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\boxed{v_k \neq 0}$; posto

$$\ell = (\underbrace{0,\dots,0}_{k};\ \frac{v_{k+1}}{v_k},\dots,\frac{v_n}{v_k})^T \in \mathbb{R}^n \quad \text{e}$$

$$H = I - \ell e_k^T \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{si ha:}$$

- H è tr inf con $h_{jj} = 1$, $j = 1,\dots,n$ ($\Rightarrow$ invertibile)
- $Hv = (v_1,\dots,v_k,0,\dots,0)^T$
- $\forall w \in \mathbb{R}^n$ t.c. $w_k = 0$ si ha $Hw = w$

> Per esplicitare la dipendenza da v e k, indicheremo la matrice H con la sigla $\lambda(v,k)$.

<u>Es</u>: $v = \begin{bmatrix}1\\2\\4\\6\end{bmatrix}$, $k = 2$; $v_2 \neq 0$, $\ell = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\3\end{bmatrix}$, $\ell e_2^T = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&3&0&0\end{bmatrix} = (0,\ell,0,0)$

e $\lambda\left(\begin{bmatrix}1\\2\\4\\6\end{bmatrix},2\right) = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&-3&0&1\end{bmatrix}$.

---

descrizione della funzione EG (operando in $\mathbb{R}$)

> $(S,D) = EG(A)$
>
> <u>dati</u>: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
>
> $A^{(1)} = A$;
>
> <u>per</u> $k = 1,\dots,n-1$ <u>ripeti</u>
>
> <u>se</u> $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ <u>allora</u> (<u>Om</u>: $a_{kk}^{(k)}$ si chiama PIVOT)
>
> - $H_k = \lambda(a_k^{(k)}, k)$;
> - $A^{(k+1)} = H_k A^{(k)}$
>
> <u>altrimenti</u> STOP
>
> <u>uscita</u>: $S = H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}$; $D = A^{(n)}$

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix}2&1&0\\4&0&1\\6&1&-1\end{bmatrix}$. $A^{(1)} = A$

- $k=1$, $a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$; $H_1 = \lambda\left(\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix},1\right) = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$; $A^{(2)} = \begin{bmatrix}2&1&0\\0&-2&1\\0&-2&-1\end{bmatrix}$
- $k=2$, $a_{22}^{(2)} = -2 \neq 0$; $H_2 = \lambda\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix},2\right) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$; $A^{(3)} = \begin{bmatrix}2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}$

$$EG(A) = \left(\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&1&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}\right)$$

<u>Oss</u>:
- $A^{(n)}$ è tr sup
- H_k^{-1} è tr inf con 1 sulla diag ($k = 1,\dots,n-1$)

  $\Rightarrow S = H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1}$ è tr inf con $s_{kk} = 1$

  > <u>Es</u> (per casa): prodotto di matr tr inf con 1 sulla diag è tr inf con 1 sulla diag.

- $A^{(n)} = H_{n-1}\cdots H_1 A \Rightarrow A = H_1^{-1}\cdots H_{n-1}^{-1} A^{(n)} = SD$
- $d_{kk} = a_{kk}^{(k)}$ (k-esimo pivot)

<u>Pb</u>: non sempre EG è def (<u>Es</u>: $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$)

Pb : non sempre EG è def (Es : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

Oss : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$; procedim per la soluzione del sistema $Ax = b$ ...

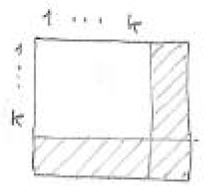
(1) $(S,D) = EG(A)$
(2) $c = SA(S,b)$
(3) $x = SI(D,c)$

procedim NON SODDISFACENTE, in generale:
SE passo (1) ok, ALLORA trova $x \Leftrightarrow A$ invertibile
MA passo (1) può fallire anche se A invertibile !

• studio dell' ins di def di EG.

def (minori principali di testa)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \{1,\dots,n\}$; $A[k]$ minore di A :



"minore pr di testa di A (di ordine k)"

> TEO (ins di def di EG):
> $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; EG è def in A $(\sim a_{kk}^{(k)} \neq 0$ per $k = 1,\dots,n-1)$
> $\Leftrightarrow \det A[k] \neq 0$ per $k = 1,\dots,n-1$
>
> (dim: no)

Es : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ND/i , $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ND/i , $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ D/ni

> Oss : il teo non parla di $\det A[n] = \det A$!

Oss : (1) Se S,D è fatt LR di A con $d_{kk} \neq 0$, $k = 1,\dots,n-1$ allora $\exists!$ fatt LR di A (dim : solo caso $d_{nn} \neq 0$ ...)

$\Rightarrow$ **SE EG def in A ALLORA EG(A) è l'unico fatt LR**

(2) **Sia A invert ; EG non def in A $\Rightarrow \nexists$ fatt LR di A**

dim ($\exists$ fatt LR $\Rightarrow$ EG def in A)

• Sia S,D fatt LR di A ;
• A invert $\Rightarrow$ D invert $\Rightarrow d_{kk} \neq 0$, $\forall k$;
• $A = SD \Rightarrow A[k] = S[k]\,D[k]$ (disegnino ...) $\Rightarrow \det A[k] =$
$= \det D[k] = d_{11} \cdots d_{kk} \neq 0 \Rightarrow$ EG def in A (usando teo precedenti).

Situazione "grafica" :

RELAZIONE EG / fatt LR

	EG: def	n. def
inv	$\exists!$	$\nexists$ (2)
n. inv	$\exists!$ (1)	$\nexists / \exists_\infty$

$\mathbb{R}^{n\times n}$

> Es : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \nexists$ fatt ;
> $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \exists_\infty$ fatt