CN # 24,25 / 25 ottobre 2012 / B25

## 2 SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI

**Pb:** dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile, $b \in \mathbb{R}^n$
determinare $x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax^* = b$

**Oss:** $A$ invertibile significa (propr equivalenti)

- $\exists!\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $AB = BA = I$ (matr identità, $B = A^{-1}$)
- $\det A \neq 0$
- $\ker A = \{0\}$
- $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
- colonne (righe) di $A$ sono elem lin indip (q. di BASE) di $\mathbb{R}^n$
- $\forall b \in \mathbb{R}^n,\ \exists!\ x^* :\ Ax^* = b$

---

- Casi SEMPLICI

(D) $A$ diagonale ($a_{ij} = 0$ per $i \neq j$)

- invertibile $\sim$ $a_{kk} \neq 0$, $k = 1, \dots, n$
- soluzione: $x_k = b_k / a_{kk}$, $k = 1, \dots, n$

(T) $A$ triangolare ($a_{ij} = 0$ per $\begin{cases} i > j & \text{tr SUPERIORE} \\ i < j & \text{tr INFERIORE} \end{cases}$)

- invertibile $\sim$ $a_{kk} \neq 0$, $k = 1, \dots, n$
- soluzione: TS) SOSTITUZIONE all'INDIETRO
  TI) SOSTITUZIONE in AVANTI (Es: descrivere procedura!)

$x = SI(T, c)$
dati: $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tr sup invert, $c \in \mathbb{R}^n$
uscita: $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Tx = c$
$x_n = c_n / t_{nn}$
per $k = n-1, \dots, 1$ ripeti
- $s_k = c_k - (t_{k,k+1} x_{k+1} + \dots + t_{kn} x_n)$;
- $x_k = s_k / t_{kk}$

PROCEDURA (FUNZIONE) SOSTITUZIONE all'IND (op in $\mathbb{R}$)

(O) $A$ ortogonale (ovvero – proprietà equivalenti:
- colonne (righe) sono BASE ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$, risp al p.s. canonico
- $A^T A = I$
- $A^{-1} = A^T$ )

- invertibile sicuramente
- soluzione: $Ax = b \sim A^T A x = A^T b$ $\sim \boxed{x = A^T b}$

(P) $A$ di permutazione (le colonne [righe] di $A$ sono una permutaz di quelle $e_1, \dots, e_n$ della matr identità; Es: $I, J$)

**Oss:** $A$ di permutazione ...
- $\Rightarrow A$ ortogonale
- $v \in \mathbb{R}^n$, le comp di $Av$ ...

- invertibile sicuramente
- soluzione: $x^* = A^T b$ (ottenuta permutando le comp. di $b$!)

**Es:** $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; determ $P$ di perm t.c. $Pv = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

---

- Caso GENERALE

idea: fattorizzare $A$ con (scrivere $A$ come prodotto di) fattori SEMPLICI...

**Es:** (1) fattorizzazione LR

$S, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.
- $S$ tr. inf con $s_{kk} = 1$ (invert!)
- $D$ tr sup
- $SD = A$

**Oss:** $A$ invert $\Leftrightarrow$ $D$ invert

(2) fattorizz QR $\quad U, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.

- $U$ ortogonale (invertibile !)
- $T$ tr sup
- $UT = A$

$\boxed{\underline{\text{Oss}}: A \text{ invert} \Leftrightarrow T \text{ invert}}$

... poi (caso della fattorizzazione $A = MN$)

$Ax = b \sim MNx = b$ • $\underline{\text{cambio variabili}}$ : $Nx = c$ (invertibili)

- $Mc = b$ (caso semplice) $\longrightarrow$ ricavo $c$
- $Nx = c$ (caso semplice) $\longrightarrow$ ricavo $x$

---

$\underline{\text{Es}}$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è fatt di $A$ ;

- decidere se LR o QR (o nessuna delle due...)
- risolvere il sist $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

---

$\underline{\text{Pb}}$: assegnata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ determ fatt LR ...

$\underline{\text{Soluz}}$: tentare usando $\boxed{\text{elim di Gauss}}$

... QR

$\underline{\text{Soluz}}$: tentare usando $\boxed{\text{procedura di GRAM-SCHMIDT}}$