

- Criteri d'arresto (operando in \mathbb{R})

1) $h, [a, b]$, x_0 che verif ip α con loc ;

dato $\delta > 0$:

$$\boxed{\text{se } |x_k - x_{k-1}| < \delta \text{ allora STOP}}$$

infatti:

$$\bullet |x_k - x_{k-1}| \begin{cases} \leq |x_k - \alpha| + |x_{k-1} - \alpha| \leq L^{k-1} (L+1) |x_0 - \alpha| \rightarrow 0 \\ = |h(x_{k-1}) - h(x_{k-2})| < |x_{k-1} - x_{k-2}| \end{cases}$$

\Rightarrow decrescenti

$$\bullet x_k - x_{k-1} = x_k - \alpha + \alpha - x_{k-1} = \underbrace{h(x_{k-1}) - h(\alpha)} + \alpha - x_{k-1} = h'(\theta)(x_{k-1} - \alpha)$$

$$= (h'(\theta) - 1)(x_{k-1} - \alpha)$$

$$\Rightarrow x_{k-1} - \alpha = \frac{x_k - x_{k-1}}{h'(\theta) - 1} \Rightarrow \boxed{|x_{k-1} - \alpha| \leq \frac{|x_k - x_{k-1}|}{1-L} < \frac{\delta}{1-L}}$$

2) $f \in C^1$, $f' \neq 0$ su $[a, b]$, $m = \min\{|f'(x)|, x \in [a, b]\}$

dato $\delta > 0$: se $|f(x_k)| < \delta$ allora STOP

infatti:

$$\bullet f(x_k) - f(\alpha) \begin{cases} = f(x_k) \\ = f'(\theta)(x_k - \alpha) \end{cases} \Rightarrow x_k - \alpha = \frac{f(x_k)}{f'(\theta)}$$

$$\Rightarrow |x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{m} < \frac{\delta}{m}$$

$$\bullet x_k \rightarrow \alpha \text{ (dalle ip)} \Rightarrow f(x_k) \rightarrow 0 \text{ (continuità di } f)$$

Oss: ① attenzione se $L \approx 1$; ② attenzione se $m \approx 0$.