

Problema 3

Sia $h(x) = \frac{1}{9} - 3x^3$.

- (a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.
- (b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo ed operando in \mathbb{R} risulta convergente.

• METODO di NEWTON

f derivabili e $f' \neq 0$; e' il m. it ad un punto

def da

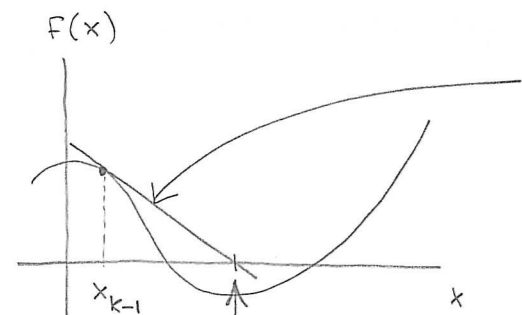
$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Proprietà: • $f(x) = 0$ equivalente a $h(x) = x$

• SE $f \in \mathcal{C}^2$ e α zero di f ALLORA ordine di conv almeno 2

$$\left[\Rightarrow \exists [a,b] \text{ che verifica ip Tes conv loc} \right]$$

• (int geometrica: metodo delle tangenti.)



$$y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$$

(retta tangente al grafico di f in x_{k-1})

x t.c. $f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) = 0$

ovvero $x = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} = h(x_{k-1})$

Oss (scelta di x_0 , metodo di Newton):

SE $[a,b]$, $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$, x_0 t.c.

- 1) $\exists \alpha \in [a,b]$ zero di f
- 2) $\forall x \in [a,b]: f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0$ ($\Rightarrow \alpha$ unico zero...)
- 3) $f(x_0) f''(x_0) > 0$

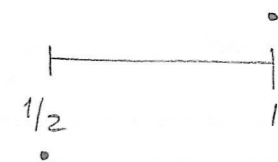
ALLORA: la success gen del m di N a partire da x_0

- a) e' convergenti ad α
- b) e' monotona.

(dim: graficamente, caso particolare...)

Es: $f(x) = x + \log x$; decidere se sia utilizzabile il m di N per appross lo zero di f .

• α zero di f in $[\frac{1}{2}, 1]$



• $f \in \mathcal{C}^2(\frac{1}{2}, 1)$

• $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ in $[\frac{1}{2}, 1]$ (\Rightarrow m di N utilizz!))

• $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ in $[\frac{1}{2}, 1]$

$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$, success monotone crescente $\rightarrow \alpha$.

Es: $f(x) = e^x + x - 3$

- I) determ # zeri e separazione
- II) decidere se m it def da $h(x) = 3 - e^x$ utilizz...
- III) decidere se m di N utilizz...

Es: $f(x) = 1 - x^2 - x$

(I) determ # zeri e separazione

(II) decideru se m it def da $h(x) = 1 - x^2$ utri l'22...

(III) decideru se m di \mathbb{N} utri l'22...

Es: $f(x) = \arctan x$; decideru se m di \mathbb{N} utri l'22

per approm lo zero di $f(x=0)$ e, erant, determ

x_0 "buono".
