

Oss:  $x$  reale  $\neq 0$ ,  $\beta$  intero  $\geq 2$  (BASE)

$\exists! b \in \mathbb{Z}$  :  $g = \frac{|x|}{\beta^b} \in [\beta^{-1}, 1)$   
 (ESPOSANTE) (FRAZIONE)

ovvero:  $\exists!$  scrittura di  $x$  nella forma  $x = (-1)^s \beta^b g$   
 con  $s \in \{0,1\}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $g \in [\beta^{-1}, 1)$ .

Oss: la condiz  $g \in [\beta^{-1}, 1)$  si traduce con: la scrittura posizionale di  $g$  in base  $\beta$  ha la forma  $0, c_1 c_2 \dots$  con  $c_1 \neq 0$ .

Es:  $x = \frac{1}{10}$ ,  $\beta = 10 \Rightarrow s=0, b=0, g = \frac{1}{10} = 0,1$   
 scrittura posizionale di  $g$  in base dieci ("lunghezza 1")

$x = \frac{1}{10}$ ,  $\beta = 2 \Rightarrow s=0, b=-3, g = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,11001100\dots$   
 scrittura posizionale di  $g$  in base due ("lunghezza infinita")

def (numeri in v. mobile; precisione)

- $\beta$  intero  $\geq 2$ ,  $m$  intero  $> 0$

$F(\beta, m) = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^s \beta^b 0, c_1 \dots c_m\}$   
 con  $s \in \{0,1\}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$   
 $c_1, \dots, c_m \in \{0, \dots, \beta-1\}$ ,  $c_1 \neq 0$

"insieme dei numeri in virgola mobile e precisione  $m$ , in base  $\beta$ "

scrittura posiz delle frazioni in base  $\beta$

Es:  $F(10, 1) = M$

- $\frac{1}{100} \in M$  perché  $\frac{1}{100} = 10^{-1} 0,1$
- $\frac{11}{100} \notin M$  perché  $\frac{11}{100} = 10^0 0,11$  e la frazione...
- tutti gli elem positivi di  $M$  con esponente zero sono:  $\{0,1; 0,2; \dots; 0,9\} = \mathcal{B}$
- tutti gli elem positivi di  $M$  con esponente  $b$  sono:  $\{10^b 0,1; 10^b 0,2; \dots; 10^b 0,9\} = 10^b \mathcal{B}$
- tutti quelli negativi con esponente  $b$  sono:  $\{-10^b 0,9; -10^b 0,8; \dots; -10^b 0,1\} = (-1) 10^b \mathcal{B}$
- $F(10, 1) = \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} (-1) 10^b \mathcal{B} \cup \{0\} \cup \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} 10^b \mathcal{B}$

Proprietà di  $F(\beta, m) \subset \mathbb{R}$ :

- numerabili e ordinato;
- simmetrico rispetto a zero;
- zero è p.to di accumulazione;
- $\sup F(\beta, m) = +\infty$ ,  $\inf F(\beta, m) = -\infty$ .

Es: 1) determ una success  $\xi_k \in F(\beta, m)$

t.c.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$  (Sol:  $\xi_k = \beta^{-k} 0,1$ )

2) ... t.c.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = +\infty$  (Sol:  $\xi_k = \beta^k 0,1$ )

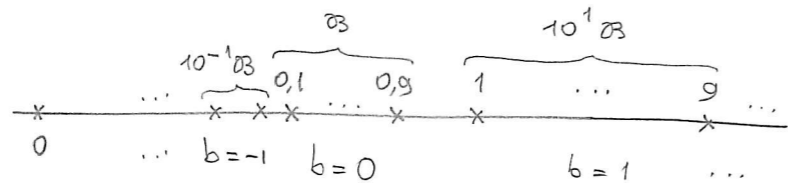
3) decidere se  $\frac{7}{8} \in F(2, 2)$

Sol: (a) determ esp e fraz in base due:  $b=0, g = 7/8$   
 (b) decidere se la fraz è compatibile con la precisione: non compatibile  $\Rightarrow 7/8 \notin F(2, 2)$ .

Oss (struttura geometrica di  $F(\beta, m)$ )

• Es:  $F(10, 1)$ ,  $\mathcal{B} = \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$

elem positivi:



Oss:  $b \in \mathbb{Z}; \max\{10^b \mathcal{B}\} < \min\{10^{b+1} \mathcal{B}\}$

• def (f. successore, predecessore)

$\xi < \in F(\beta, m)$   
 $\neq 0$

$\sigma(\xi) =$  "il primo ndm  $> \xi$ "  
↑ SUCCESSORE di  $\xi$

$\pi(\xi) =$  "il primo ndm  $< \xi$ "  
↑ PREDECESSORE di  $\xi$

Oss:  $\sigma; \pi: F(\beta, m) \setminus \{0\} \rightarrow F(\beta, m) \setminus \{0\}$

e  $\pi = \sigma^{-1}$

Es:  $F(10, 3)$ . Determin:  $\sigma(10^{-2} 0,501)$ ,  $\pi(10^{-2} 0,501)$   
 $\sigma(10^4 0,100)$ ,  $\pi(10^4 0,100)$

• (per casa):  $F(2, 3)$ . Determin:  $\sigma(2^{-3} 0,101)$ ,  
 $\pi(2^{-3} 0,101)$ ,  $\sigma(2^{-3} 0,100)$ ,  $\pi(2^{-3} 0,100)$ ;  
 $\pi(-2^{-1} 0,110)$ ,  $\sigma(2^{-1} 0,110)$  e verificare  
che  $\pi(-2^{-1} 0,110) = -\sigma(2^{-1} 0,110)$   
(come mai?)

• TEO (distribuzione degli elem di  $F(\beta, m)$ )

$$\xi = \beta^b g \begin{cases} \in F(\beta, m) \\ > 0 \end{cases}$$

Allora:  $\frac{\sigma(\xi) - \xi}{\beta^b} = \beta^{-m}$  (indip da  $\xi$ !!)

(lim: ...)