

Es (fatt QR, caso rettangolare):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ fatt QR di } A \text{ è } (U, T) \text{ t.c.}$$

- $U \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ a colonne ortonormali
risp ps canonico in \mathbb{R}^3
- $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tr sup
- $A = UT$

Si determina come nel caso quadrato...:

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix}$$

Oss: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a colonne lin indip, $b \in \mathbb{R}^m$;
 U, T fatt QR di A .

- colonne di A lin indip $\Rightarrow T$ invertibile (dici: per an.)
- ep normali per il sist $Ax = b$:

$$\begin{cases} A^T A = T^T U^T U T = T^T T \\ A^T b = T^T U^T b \end{cases} \quad T^T T x = T^T U^T b$$

MA T^T invertibile \Rightarrow $Tx = U^T b$.

• si ha: $\mu_2(A^T A) = (\mu_2(T))^2$ [dici: no]

OVVERO: il sist $A^T A x = A^T b$ (ep normali)
e $Tx = U^T b$

sono equivalenti, ma la matrice del secondo
(è triangolare ed) ha numero di condizionam
(quasi) sempre minore del primo!

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; utilizz fatt QR di A per determ soluz
di $Ax = b$ nel senso dei mq

Sol: ep. normali $\sim Tx = U^T b$

$$U^T b = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \rightarrow x_2 = 2/3, x_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2/3}}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Es: $P_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

determ x che rende min $F(x_1, x_2) = d(x, P_1)^2 + d(x, P_2)^2 + d(x, P_3)^2$

Sol: ... $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

• int fisica: config di equilibrio di un pto mobile nel
piano collegato da molle con $P_1, P_2, P_3 \dots$