Oss: $A = (a_1, \dots, a_j) \in \mathbb{R}^{n \times j}$, $n \geq j$, $b \in \mathbb{R}^n$

- $V = \mathbb{R}^n$ con ps canonico, $v = b$
- $W = \langle a_1, \dots, a_j \rangle \subset \mathbb{R}^n$
- l'elemento di W migliore appross di $v = b$ nel senso dei m.q. è la pr ~~ort~~ di b su W
- le coord della pr ort di b su W sono tutte le colonne soluz del sist delle eq normali:

$$(A^T A)\, x = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & \cdots & a_j \cdot a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 \cdot a_j & \cdots & a_j \cdot a_j \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \cdot a_1 \\ \vdots \\ b \cdot a_j \end{bmatrix}$$

RICORDARE che:
$a, b \in \mathbb{R}^n$
$a \cdot b = b^T a$

- la matr $A^T A$ è simmetrica semidef positiva ($\forall v \in \mathbb{R}^j$, $A^T A v \cdot v \geq 0$)
- SE colonne di A lin indip ALLORA è def positiva ($\Rightarrow$ invertibile)

Es: $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

- eq normali
- soluz delle eq normali
- migliore appross di v in W nel senso dei m.q

(Sol: ...)

Es: V, v come nell' Es precedente; $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

- eq normali e soluz
- migliore appross ...

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- verif che $Ax = b$ non ha soluz
- soluz di $Ax = b$ nel senso dei m.q.
- soluz di $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ nel senso dei m.q.

(Oss: sist equivalenti, ma ...)

Oss (pseudoinversa):

$A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $n \geq k$, $b \in \mathbb{R}^n$
$= (a_1, \dots, a_k)$, colonne lin indip.

- LA soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei m.q. è

$$x^* = \boxed{(A^T A)^{-1} A^T} b$$

PSEUDOINVERSA di A $(A^+) \in \mathbb{R}^{k \times n}$

- SE $n = k$ si ha $A^+ = A^{-1}$
- LA proiez ortogonale di b su $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ è $A x^* = A A^+ b$

Es: $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ps canonico in V)

- W è un piano: determ eq cartesiana;
- determ v^*, proiez ortogonale di v su W;
- posto $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, determ A^+.

Sol: • Si cercano gli $x \in \mathbb{R}^3$ t.c. i vett $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, x$ sono lin dip

ovvero t.c. $\det \begin{bmatrix}1 & 0 & x_1\\ 1 & 1 & x_2\\ 0 & 1 & x_3\end{bmatrix} = 0$

Poiché $\begin{bmatrix}1 & 0 & x_1\\ 1 & 1 & x_2\\ 0 & 1 & x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & x_2 - x_1\\ 0 & 0 & x_3 - x_2 + x_1\end{bmatrix}$ (fatt LR determ con EG)

si ha: $\boxed{x_3 - x_2 + x_1 = 0}$

• Le coord di v^* risp a $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ si determinano come soluz nel senso dei min quadr del sist:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

ovvero come soluz delle eq.ni normali: $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,

sist. equivalente: $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \rightarrow x = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad v^* = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

• $A^TA = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3/2\end{bmatrix}$

$(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & -1/3\\ 0 & 2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/3 & -1/3\\ -1/3 & 2/3\end{bmatrix}$

$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix}2/3 & 1/3 & -1/3\\ -1/3 & 1/3 & 2/3\end{bmatrix}$; $A^+b = \begin{pmatrix}2/3\\ -1/3\end{pmatrix}$, come doveva

def (funz che meglio approssima i dati nel senso dei m.q.)

dati: $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$, G s.s.v. di $C([a,b], \mathbb{R})$ di dim finita;

$\boxed{\begin{array}{l} g \in G \text{ è un elem di } G \text{ che meglio approssima i dati nel senso dei m.q se:} \\ \forall \tilde{g} \in G, \ (\tilde{g}(x_0) - y_0)^2 + \dots + (\tilde{g}(x_k) - y_k)^2 \geq (g(x_0) - y_0)^2 + \dots + (g(x_k) - y_k)^2 \end{array}}$

Es: determ gli elem di $P_1(\mathbb{R})$ che meglio approssimano i dati $(-1,0), (0,0), (1,1)$ nel senso dei m.q.

Sol: $P_1(\mathbb{R}) = \langle 1, x \rangle$; $p(x) = a_0 + a_1 x$

$$(p(-1) - 0)^2 + (p(0) - 0)^2 + (p(1) - 1)^2 = \left\| \begin{bmatrix}p(-1)\\ p(0)\\ p(1)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\|^2 =$$

(norma ottenuta da p.s. canonico in $\mathbb{R}^3$)

$$= \left\| \begin{bmatrix}a_0 + a_1(-1)\\ a_0 + a_1(0)\\ a_0 + a_1(1)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| a_0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + a_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\|^2$$

ovvero, posto $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$: $= \left\| A\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix} - b \right\|^2$

I coeff a_0, a_1 che individuano gli elem di $P_1(\mathbb{R})$ cercati sono q.li le soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei min quadr.

Si ottiene: $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow a_0 = 1/3, \ a_1 = 1/2$

e l'unico elem che soddisfa la rel'este è $\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x}$