

def (migliore appross in spazi con ps):

- $V$  sp rett su  $\mathbb{R}$  con ps;  $\forall v \in V, \|v\| = \sqrt{v \cdot v}$
- $W$  ssv di  $V$  con  $\dim W < +\infty$
- $v \in V$

$w \in W$  è una migliore appross di  $v$  in  $W$  se:

$$\forall w' \in W, \|v - w\| \leq \|v - w'\|$$

Oss: def equivalenti:

$$\forall w' \in W, \|v - w\|^2 \leq \|v - w'\|^2$$

TEO:  $V, W, v$  come nella def; esiste una sola migliore appross di  $v$  in  $W$ ; la proiezione ortogonale di  $v$  su  $W$ .

Oss:  $v^*$  è pr ort di  $v$  su  $W$  significa  $v - v^* \perp W$   
ovvero:  $\forall w \in W, (v - v^*) \cdot w = 0$ .

dim:  $v^*$  pr ort di  $v$  su  $W, w' \in W$ :

$$\|v - w'\|^2 = \left\| \underbrace{v - v^*}_{\perp W} + \underbrace{v^* - w'}_{\in W} \right\|^2 = \|v - v^*\|^2 + \|v^* - w'\|^2$$

Oss:  $a \in W, b \perp W \Rightarrow \|a + b\|^2 = (a + b) \cdot (a + b)$   
 $= a \cdot a + \cancel{a \cdot b} + \cancel{b \cdot a} + b \cdot b = \|a\|^2 + \|b\|^2$   
 (Teo di Pitagora)

da cui:

- $\forall w' \in W, \|v - w'\|^2 \geq \|v - v^*\|^2$
- $\|v - w'\|^2 = \|v - v^*\|^2 \Leftrightarrow w' = v^*$

Es:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2,4 \end{bmatrix}$ ;

- $V = \mathbb{R}^3$  con ps canonico
- $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle, \dim W = 2$
- $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2,4 \end{bmatrix} = b$

la migliore appross di  $v$  in  $W$  è  $v^* \in W$  tale che

$$\forall w' \in W, \|v - v^*\|^2 \leq \|v - w'\|^2$$

MA:  $W = \{ Ax \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}^2 \}$

dunque le condiz precedenti equivalenti a

i coefficienti della migliore appross di  $v$  in  $W$  sono le  $x^* \in \mathbb{R}^2$  tali che

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \|b - Ax^*\|^2 \leq \|b - Ax\|^2$$

ovvero le soluz del sist  $Ax = b$  nel senso dei m.q.

TEO  $\Rightarrow$  esistono soluz di  $Ax = b$  nel senso dei m.q.;

- una sola se e solo se colonne di  $A$  lin indep
- infinite se colonne di  $A$  lin dip