

def (migliore appross in spazi con ps):

- V sp rett su \mathbb{R} con ps; $\forall v \in V, \|v\| = \sqrt{v \cdot v}$
- W ssv di V con $\dim W < +\infty$
- $v \in V$

$w \in W$ è una migliore appross di v in W se:

$$\forall w' \in W, \|v - w\| \leq \|v - w'\|$$

Oss: def equivalenti:

$$\forall w' \in W, \|v - w\|^2 \leq \|v - w'\|^2$$

TEO: V, W, v come nella def; esiste una sola migliore appross di v in W ; la proiezione ortogonale di v su W .

Oss: v^* è pr ort di v su W significa $v - v^* \perp W$
ovvero: $\forall w \in W, (v - v^*) \cdot w = 0$.

dim: v^* pr ort di v su $W, w' \in W$:

$$\|v - w'\|^2 = \underbrace{\|v - v^*\|}_{\perp W}^2 + \underbrace{\|v^* - w'\|}_{\in W}^2 = \|v - v^*\|^2 + \|v^* - w'\|^2$$

Oss: $a \in W, b \perp W \Rightarrow \|a + b\|^2 = (a + b) \cdot (a + b)$
 $= a \cdot a + \cancel{a \cdot b} + \cancel{b \cdot a} + b \cdot b = \|a\|^2 + \|b\|^2$
 (Teo di Pitagora)

da cui:

- $\forall w' \in W, \|v - w'\|^2 \geq \|v - v^*\|^2$
- $\|v - w'\|^2 = \|v - v^*\|^2 \Leftrightarrow w' = v^*$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2,4 \end{bmatrix}$;

- $V = \mathbb{R}^3$ con ps canonico
- $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle, \dim W = 2$
- $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2,4 \end{bmatrix} = b$

la migliore appross di v in W è $v^* \in W$ tale che

$$\forall w' \in W, \|v - v^*\|^2 \leq \|v - w'\|^2$$

MA: $W = \{Ax \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}^2\}$

dunque le condiz precedenti equivalenti a

i coefficienti della migliore appross di v in W sono le $x^* \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \|b - Ax^*\|^2 \leq \|b - Ax\|^2$$

ovvero le soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei m.q.

TEO \Rightarrow esistono soluz di $Ax = b$ nel senso dei m.q.;

- una sola se e solo se colonne di A lin indep
- infinite se colonne di A lin dep