

(B) ricostruire con f cont. lin. a tratti:

$$|r(\delta)| = \left| \delta_0 s_0(t) + \dots + \delta_k s_k(t) \right|$$

base di $s \dots$

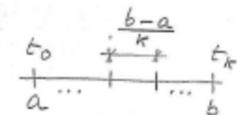
$$\leq |\delta_0| |s_0(t)| + \dots + |\delta_k| |s_k(t)| \leq \max\{|\delta_0|, \dots, |\delta_k|\}$$

$|s_0(t)| + \dots + |s_k(t)| = s_0(t) + \dots + s_k(t) = 1$

OVVERO: Nel caso di ricostruzione con int. polinomiali il condiz. è tanto peggiore quanto più k è grande; nel caso di ricostruzione con f cont. lin. a tratti il condiz. è sempre buono.

E1 (appross. numerica di integrali):

dati: $[a, b] \subset \mathbb{R}; f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$
 determinare $\int_a^b f(t) dt$ $\left[\text{Es: } \int_0^1 e^{-t^2} dt \right]$

- $k \text{ int} \geq 1, x_j = a + \frac{b-a}{k} j, j = 0, \dots, k$ 
- r di ricostruzione con f cont. lin. a tratti su $I_1 = [x_0, x_1], \dots, I_k = [x_{k-1}, x_k]$
- $s(x) = r(c(f))(x) = f(x_0) s_0(x) + \dots + f(x_k) s_k(x)$
- $e(f) = \max_{[a, b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{M_2}{8} \left(\frac{b-a}{k}\right)^2$

$$I = \int_a^b f(t) dt, \quad J_k = \int_a^b s(t) dt$$

$$\Rightarrow |I - J_k| = \left| \int_a^b (f(t) - s(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - s(t)| dt$$

$$\leq \int_a^b \max_{[a, b]} |f(t) - s(t)| dt = (b-a) \max_{[a, b]} |f(x) - s(x)|$$

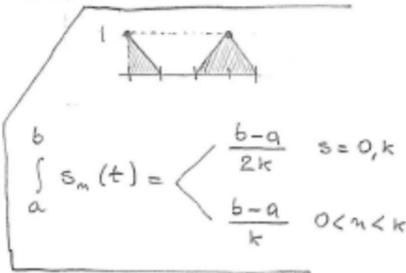
$$\leq \frac{M_2}{8} \frac{(b-a)^3}{k^2}$$

Oss: $\forall \delta > 0, \exists k$ t.c. $|I - J_k| < \delta$

$$J_k = \int_a^b s(t) dt = \int_a^b (f(x_0) s_0(t) + \dots + f(x_k) s_k(t)) dt$$

$$= f(x_0) \int_a^b s_0(t) dt + \dots + f(x_k) \int_a^b s_k(t) dt$$

$$= \frac{b-a}{k} \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + \frac{1}{2} f(x_k) \right]$$

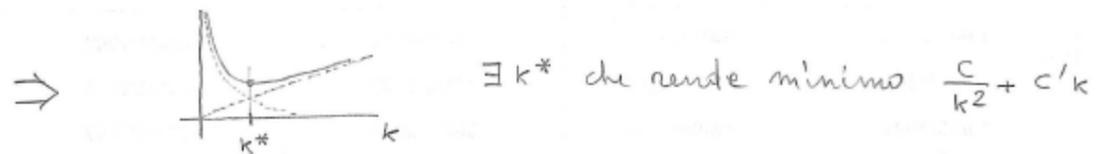


calcolo "elementare"!

• Si approssima I con J_k , scegliendo k sufficientemente grande.

Oss: ϕ_k funz utilizz dal calc per appross J_k ;

- $|I - \phi_k| = |I - J_k + J_k - \phi_k| \leq \underbrace{|I - J_k|}_{\approx \Sigma} + \underbrace{|J_k - \phi_k|}_{\approx \oplus \dots \oplus}$
- $|I - J_k| = \frac{C}{k^2}$
- $|J_k - \phi_k| = C/k$ se "tutto va bene"

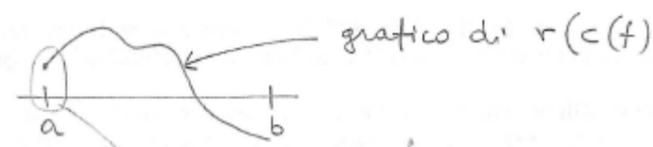


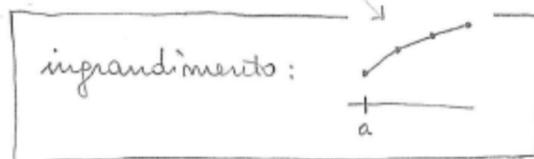
Es (grafico di f):

dati: $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$

determ il grafico di f su $[a, b]$.

- k int ≥ 1 , $x_j = a + \frac{b-a}{k} j$, $j=0, \dots, k$; r f di ricostr con f conti...
- $x = (x_0, \dots, x_k)^T$, $F = c(f) = (f(x_0), \dots, f(x_k))^T$
- $>$ plot (x, F)

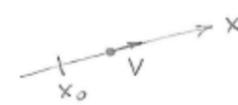
produce:  grafico di $r(c(f))$



• Pb: come scegliere k?

4 APPROSSIMAZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI

Es: punto materiale che si muove di MOTO UNIFORME su una retta, con velocita' V e posizione x_0 per $t=0$



Pb: risultati di misure...

$$\begin{aligned} x(1) &= 1 \\ x(2) &= 1,5 \\ x(4) &= 2,4 \end{aligned} \quad \text{determ } V \text{ e } x_0$$

Soluz: moto uniforme $\Rightarrow x(t) = x_0 + Vt \in \langle 1, t \rangle$

Cerchiamo α_0, α_1 t.c. $\alpha_0 + \alpha_1 t$ int i dati...

$$\Rightarrow \alpha_0, \alpha_1 \text{ soluz di: } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2,4 \end{bmatrix} \quad (Ax = b) \quad \text{SISTEMA INCOMPATIBILE}$$

- Ragionevole perche' dati ottenuti da misure...
- R/PIEGO: cerco α_0, α_1 che "minimizze l'errore" ... $Ax = b$

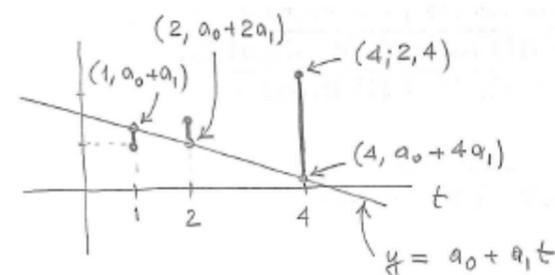
def: $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n > m$, $b \in \mathbb{R}^n$;

$v \in \mathbb{R}^m$ SOLUZIONE di $Ax = b$ NEL SENSO DEI MINIMI QUADRATI se $\forall w \in \mathbb{R}^m$, $\|Aw - b\|_2 \geq \|Av - b\|_2$ (ovvero: $\|\dots\|_2^2 \geq \|\dots\|_2^2$)

Oss: $x^* \in \mathbb{R}^m$ SOLUZIONE di $Ax = b$ significa $Ax^* - b = 0$;

dunque: SOLUZIONE \Rightarrow SOLUZIONE nel senso dei MINIMI QUADRATI

Es (continua, int geom dell'errore $Ax - b$)



- le componenti del vettore $Ax - b$ sono, a parte il segno, le lunghezze dei segmenti marcati in figura; tra tutte le rette si cercano quelle che rendono minime le somme dei quadrati delle lunghezze.