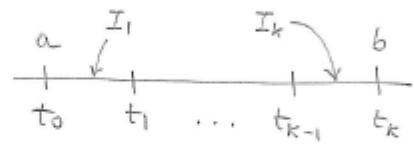


⇒ ricostr con int polinomiali soddisf solo per POCHE funzioni molto regolari.

ALTERNATIVA: ricostr con funzioni continue e linee a tratti

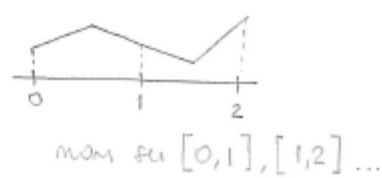
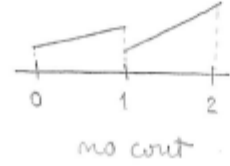
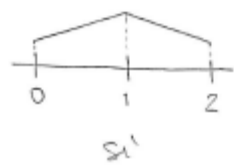
def (f lin a tratti):  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ ,  
 $I_j = [t_{j-1}, t_j]$   
 $j = 1, \dots, k$



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una f CONTINUA LINEARE A TRATTI (su  $I_1, \dots, I_k$ ) SE

- f è continua su  $[a, b]$
- $\forall j = 1, \dots, k \exists p_j \in P_1(\mathbb{R})$  t.c.  $f = p_j$  su  $I_j$

ES:



Def:  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ;  $t_0, \dots, t_k \in [a, b]$  distinti...;  $I_1, \dots, I_k \dots$

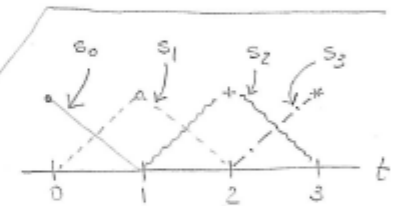
$S = \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue lin a tratti su } I_1, \dots, I_k \}$

- (A) S è sottosp. vet. di  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  (dim...)
- (B)  $\forall y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ ,  $\exists$  un solo elem di S che interpola i dati  $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$

[dim:  $\forall j \exists! p_j \in P_1(\mathbb{R})$  che interpola  $(t_{j-1}, y_{j-1}), (t_j, y_j)$ , e la f risulta cont su  $[a, b]$ .]

(C)  $s_0, \dots, s_k \in S$  t.c.  $s_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

- $s_0, \dots, s_k$  sono base di S (dim...)
- $\dim S = k+1$



Es:  $[0, 3]$ ;  $I_1 = [0, 1]$ ,  $I_2 = [1, 2]$ ,  $I_3 = [2, 3]$

- determ  $\sigma \in S$  che int i' dati  $(0, 2), (1, -6), (2, 0), (3, -1)$ .

Def (ricostr mediante f cont lin a tratti)

$[a, b]$ ,  $a = t_0, \dots, t_k = b$ , S f cont lin a tratti su  $I_j = [t_{j-1}, t_j], \dots$

•  $r: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  t.c.  $r: \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \rightarrow$  l'elem di S che int  $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$

(1) r è f di ricostr rel a c (dim...)

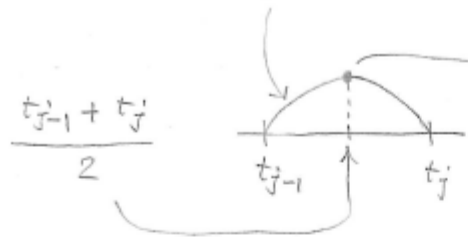
(2)  $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ ,  $M_2 = \max \{ |f^{(2)}(t)|, t \in [a, b] \}$

$\forall t \in I_j, |f(t) - r(c(f))(t)| = |f(t) - p_j(t)| \leq$

usando Teo em ricostr int polinomiale

l'elem di  $P_1(\mathbb{R})$  che int  $(t_{j-1}, f(t_{j-1})), (t_j, f(t_j))$

$$\leq \frac{M_2}{2} |t-t_{j-1}| |t-t_j| \leq \frac{M_2}{2} \left(\frac{t_j-t_{j-1}}{2}\right)^2$$



⇒ posto  $h(k) = \max \{t_1-t_0, t_2-t_1, \dots, t_k-t_{k-1}\}$

si ha: 
$$e(f) \leq \frac{M_2}{8} h(k)^2$$

Des:  $\forall f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$ : se strategia di scelta degli ist di camp  
 è t.c.  $\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = 0$  allora  $\lim_{k \rightarrow \infty} e(f) = 0$

Es: •  $t_j = a + \frac{b-a}{k} j$ ,  $j = 0, \dots, k$

$h(k) = \frac{b-a}{k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = 0$

•  $[a,b] = [0,1]$ ,  $t_j = \frac{j}{j+1}$ ,  $j = 0, \dots, k-1$ ,  $t_k = 1$

$h(k) = 1/2 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} h(k) \neq 0$

Des (condiz del pb della ricostruzione):

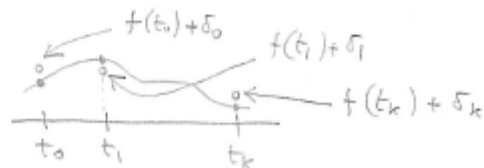
$[a,b]$ ;  $t_0, \dots, t_k$ ;  $c$  f di camp;  $r$  f di ricostr

$\delta_0, \dots, \delta_k \in \mathbb{R}$ ;  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

•  $\hat{r}(t) = r(c(f) + \delta)$

•  $|\hat{r}(t) - r(c(f))| = |r(\delta)|$

errore assoluto, all'ist  $t$ ,  
 comunque ricostruendo  
 dati "errati"



(A) ricostr con int polin:

base di Lagrange di  $P_k(\mathbb{R})$

$$|r(\delta)| = |\delta_0 l_0(t) + \dots + \delta_k l_k(t)|$$

$$\leq |\delta_0| |l_0(t)| + \dots + |\delta_k| |l_k(t)|$$

$$\leq \max\{|\delta_0|, \dots, |\delta_k|\} (|l_0(t)| + \dots + |l_k(t)|)$$

Des:  $\exists t \in [a,b]$ ,  
 $\delta_0, \dots, \delta_k \in \mathbb{R}$  t.c.  
 $|r(\delta)| = \max |\delta_j| \max\{|l_0| + \dots + |l_k|\}$

$\max\{|l_0(t)| + \dots + |l_k(t)|, t \in [a,b]\}$

$\geq C \log k$

(B) ricostr con f cont lui a tratti:

base di s...

$$|r(\delta)| = |\delta_0 s_0(t) + \dots + \delta_k s_k(t)|$$

$$\leq |\delta_0| |s_0(t)| + \dots + |\delta_k| |s_k(t)| \leq \max\{|\delta_0|, \dots, |\delta_k|\}$$

$|s_0(t)| + \dots + |s_k(t)| = s_0(t) + \dots + s_k(t) = 1$

OVVERO:

Nel caso di ricostr con int polinomiali  
 il condiz è tanto peggiore quanto più  $k$  è grande;  
 nel caso di ricostr con f cont lui a tratti  
 il condiz è sempre buono.