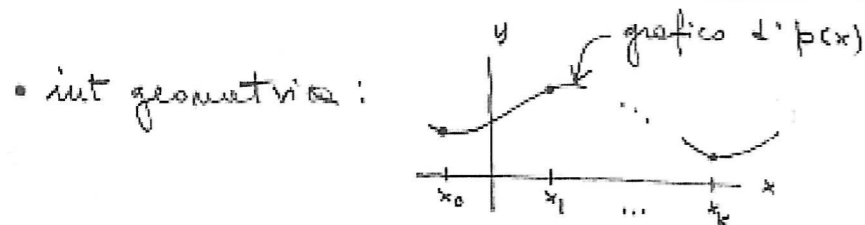


3 INTERPOLAZIONE

Pb (dell'interpolazione polinomiale):

- dati
- $k$  intero  $\geq 0$
  - $P_k(\mathbb{R}) =$  insieme di polinomi a coeff in  $\mathbb{R}$ , di grado  $\leq k$  (sottoinsieme delle  $f$  continue da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ )
  - $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ , distinti
  - $y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$

determina  $p \in P_k(\mathbb{R})$  t.c.  $p(x_0) = y_0, \dots, p(x_k) = y_k$   
 ("che interpoli i dati  $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ ")



Assegnati  $k+1$  punti — di coord  $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$  —  
 determina  $p \in P_k(\mathbb{R})$  il cui grafico contiene i punti.

Es:  $k=2$ , dati  $(-1, 0), (0, 1), (2, -2)$

•  $-x^2 + 6x + 1$  non è soluz del Pb...

•  $P_2(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1x + a_2x^2; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

← RAPPRESENTAZ  
PARAMETRICA  
di  $P_2(\mathbb{R})$

Riformulaz del Pb: cerca  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

t.c. il polin. individuato verifichi le tre condiz

$p(-1) = 0, p(0) = 1, p(2) = -2$

OVVERO de risolvere il sist di eq lin:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Oss:  $a_0, a_1, a_2$  soluzioni del sistema

$\Leftrightarrow$   
 $a_0 + a_1x + a_2x^2$  soluzioni del Pb di interp polin

Oss:  $P_k(\mathbb{R}) = \langle q_0(x), \dots, q_k(x) \rangle$  (Ad Es:  $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle$ )

cioè  $P_k(\mathbb{R}) = \{ a_0q_0(x) + \dots + a_kq_k(x); a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R} \}$

ALLORA  $a_0q_0(x) + \dots + a_kq_k(x)$  risolve il Pb di interp

$\Leftrightarrow (a_0, \dots, a_k)^T$  risolve il sist di eq. linear:

$$\begin{bmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \dots & q_k(x_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q_0(x_k) & q_1(x_k) & \dots & q_k(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

TEO (esist ed unicità della soluz)

$\forall k; x_0, \dots, x_k; y_0, \dots, y_k$

$\exists!$   $p \in P_k(\mathbb{R})$  che risolve il Pb dell'int polinom.

(dim: ... con base di Lagrange)

Es: determina l'elem di  $P_2(\mathbb{R})$  che int i dati  $(-1, 0), (0, 1), (2, -2)$ ...

A) ... usando base Lagrange

B) ... usando base Vandermonde

e verif che i polin trovati sono uguali.

Dss: basi diverse in  $P_k(\mathbb{R}) \Rightarrow$  FORME diverse del p. che interpola.

Dss:  $k=2$

- $P_2(\mathbb{R}) = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle$ : base e forma di LAGRANGE (matr identica)
- $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle$ : base e forma di VANDERMONDE (matr di  $V_i$ )
- $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1) \rangle$ : base e forma di NEWTON (matr tr inf)

Es: dati  $(0,1), (-1,2), (3,10), (1,10)$

- dettami la  $f$  di Newt del p che interpola ("interpolanti")
- (per casa) stessa cosa per dati permutati:  $(3,10), (-1,2), (1,10), (0,1)$

Pb (lineari di interp)

dati •  $[a,b] \subset \mathbb{R}$  non degenere,  $\kappa$  intero  $\geq 0$

•  $\mathcal{F}$  s.s.v delle  $f$  cont da  $[a,b]$  in  $\mathbb{R}$

con  $\dim \mathcal{F} = j$ ,  $0 < j < +\infty$

•  $L_0, \dots, L_\kappa: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  lineari ( $\kappa+1$ )

•  $y_0, \dots, y_\kappa \in \mathbb{R}$

dettami  $f \in \mathcal{F}$  t.c.  $L_0(f) = y_0, \dots, L_\kappa(f) = y_\kappa$

Es: (I) un pb di interp polin  $\rightarrow$  il pb lin di interp

t.c.  $[a,b] = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} = P_k(\mathbb{R})$ ,  $L_i(p) = p(x_i)$

[Es per casa: verif che  $L_i: P_k(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  lin]

(II) dettami  $x \in \mathcal{C}^2$  t.c.  $\begin{cases} x'' - x' = 0 \\ x(0) = x_0, x'(0) = x'_0 \end{cases} \quad (x_0, x'_0 \in \mathbb{R})$

•  $[a,b] = \mathbb{R}$ ,  $\kappa = 1$

•  $\mathcal{F} = \{v \in \mathcal{C}^2 \text{ t.c. } v'' - v' = 0\} = \langle 1, e^t \rangle \quad [\Rightarrow j=2]$

•  $L_0(f) = f(0)$ ,  $L_1(f) = f'(0)$  [sono lineari]

•  $y_0 = x_0$ ,  $y_1 = x'_0$

(III) dettami  $x \in \mathcal{C}^2$  t.c.  $\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 0, x(2\pi) = 0 \end{cases}$

•  $[a,b] = \mathbb{R}$ ,  $\kappa = 1$

•  $\mathcal{F} = \{v \in \mathcal{C}^2 \text{ t.c. } v'' + v = 0\} = \langle \sin x, \cos x \rangle \quad [j=2]$

•  $L_0(f) = f(0)$ ,  $L_1(f) = f(2\pi)$  [sono lineari]

•  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0$