Oss (uso EG/EGP per soluz sist): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$;

- (1) $(S, D) = EG(A)$
  (2) $c = SA(S, b)$
  (3) $x = SI(D, c)$

  procedura NON SODDISFACENTE, in generale:
  SE passo (1) ok, ALLORA trova $x \Leftrightarrow A$ invert
  MA passo (1) può fallire anche se A invert!

- (1) $(P; S, D) = EGP(A)$
  (2) $c = SA(S, Pb)$
  (3) $x = SI(D, c)$

  procedura SODDISFACENTE:
  - passo (1) può fallire SOLO SE A non invert

  SE A invert, TROVA soluz
  SE A non invert, si ARRESTA

Oss (unicità EGP): $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(A) $P_1 = P(1,2), \ldots$
(B) $P_1 = P(1,3), \ldots$

Es: completare EGP e confrontare i fattori ottenuti.

- FATTORIZZAZIONE QR

def: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $U, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c. ...

Es (procedim di calcolo): $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

PASSO 1: determ $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a colonne ortogonali e $\theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tr sup con $\theta_{kk} = 1$ t.c. $\Omega\theta = A$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \omega_1\theta_{12} + \omega_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \omega_1\theta_{13} + \omega_2\theta_{23} + \omega_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\omega_1 = \ldots$

$\theta_{12} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \omega_1}{\|\omega_1\|^2}$, $\omega_2 = \ldots$

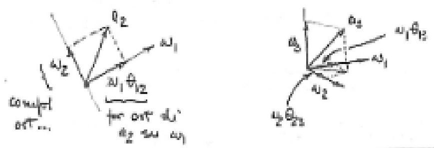
$\theta_{13} = \dfrac{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \omega_1}{\|\omega_1\|^2}$, $\theta_{23} = \dfrac{\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \omega_2}{\|\omega_2\|^2}$, $\omega_3 = \ldots$

PASSO 2: $W = \mathrm{diag}(\|\omega_1\|, \|\omega_2\|, \|\omega_3\|)$

- ΩW^{-1} è ortogonale
- $W\theta$ è tr sup
- $(\Omega W^{-1})(W\theta) = A$

q. di: $\boxed{U = \Omega W^{-1}, \; T = W\theta \text{ è fatt QR di } A}$

Oss (analogia con proc ortonorm Gram-Schmidt):



TEO (esistenza fatt QR): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, invertibile.
$\exists$ fatt QR di A, ed il proc descritto sopra ne trova una.
(dim: no)

__Oss__ (caso QR per soluz sist): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

(1) $(U, T) = QR(A)$	procedura SODDISFACENTE:
(2) $c = U^T b$	SE A invert, TROVA x
(3) $x = SI(T, c)$	SE A non invert, SI ARRESTA

---

da fare:

- CONDIZIONAMENTO
- studio in $F(2,53)$
- COSTO

__Preliminare__: norme in $\mathbb{R}^n$ e norme di matrici

già noto: $\mathbb{R}^n$ sp vett su $\mathbb{R}$ con p.s. canonico

$N: v \to \sqrt{v \cdot v} = \| v \| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$

- NORMA EUCLIDEA di v, $\|v\|_2$, $N_2(v)$

__def__ (norma, sp normato)

V sp vett su $\mathbb{R}$, $N: V \to \mathbb{R}$ __norma__ in V se:

(N1) $\forall v \in V$: $N(v) \geq 0$ e $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$

(N2) $\forall v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $N(\alpha v) = |\alpha| \, N(v)$

(N3) $\forall v, w \in V$: $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ [disug triangolare...]

(V, N) si dice SPAZIO NORMATO

__Es__ (altre norme in $\mathbb{R}^n$): $N_1: v \to |v_1| + \cdots + |v_n| = \|v\|_1$

$N_\infty: v \to \max \{|v_1|, \dots, |v_n|\} = \|v\|_\infty$

__Es__ (1) verif che N_1 è norma (Sol: ...)
(2) per casa: verif che N_∞ è norma

__Oss__: N_1, N_∞ non derivano da p.s. in $\mathbb{R}^n$
(__dim__: Oss 0.37, p. 14)

__def__ (intorno sferico): $I_N(\underset{\text{CENTRO}}{v}, \underset{\text{RAGGIO}}{r}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid N(x - v) \leq r \}$

__Es__: disegnare $I_N(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ per N_1, N_2, N_∞ ...