Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$; per determ fatt LR si utilizza la proc di ELIMINAZ di GAUSS:

1) $A^{(1)} = A$

2) si indica con r_k la riga k-esima della matrice...

$r'_1 = r_1$; $r'_2 = r_2 + \lambda_{21} r_1$ (λ_{21} t.c. $r'_{21} = 0$)

$r'_3 = r_3 + \lambda_{31} r_1$ (λ_{31} t.c. $r'_{31} = 0$)

ovvero: $A^{(2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H_1} A^{(1)}$

$\lambda_{21} = -1$, $\lambda_{31} = -1$

e $A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

3) $r'_1 = r_1$; $r'_2 = r_2$; $r'_3 = r_3 + \lambda_{32} r_2$ (λ_{32} t.c. $r'_{32} = 0$)

ovvero: $A^{(3)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{H_2} A^{(2)}$

$\lambda_{32} = -2$

e $A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Om:

- $A^{(3)}$ è tr sup (un candidato fatt destro di fatt LR)
- H_1, H_2 sono tr sup con 1 sulla diag ($\Rightarrow$ invertibili)
- $A^{(3)} = H_2 A^{(2)} = H_2 H_1 A \Rightarrow A = H_1^{-1} H_2^{-1} A^{(3)}$

e $H_1^{-1} H_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 \\ -\lambda_{31} & -\lambda_{32} & 1 \end{bmatrix}$ è tr inf con 1 sulla diag

dunque: $\boxed{H_1^{-1} H_2^{-1},\ A^{(3)} \text{ è fatt LR di } A}$

Oss: i coeff $-\lambda_{ij}$ si chiamano MOLTIPLICATORI.

Oss: $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\boxed{v_k \neq 0}$; posto

$$l = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k}; \frac{v_{k+1}}{v_k}, \dots, \frac{v_n}{v_k})^T \in \mathbb{R}^n \quad e$$

$$H = I - l e_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{si ha:}$$

- H è tr inf con $h_{jj} = 1$, $j = 1, \dots, n$ ($\Rightarrow$ invertibili)
- $Hv = (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)^T$
- $\forall w \in \mathbb{R}^n$ t.c. $w_k = 0$ si ha $Hw = w$

Per esplicitare la dipendenza da v e k, indicheremo la matrice H con la sigla $\lambda(v,k)$.

Es: $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $k = 2$; $v_2 \neq 0$, $l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $l e_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0, l, 0, 0)$

e $\lambda\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, 2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

descrizione della funzione EG (operando in $\mathbb{R}$)

$(S, D) = EG(A)$

dati: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

$A^{(1)} = A$;

per $k = 1, \dots, n-1$ ripeti

 se $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ allora (OM: $a_{kk}^{(k)}$ si chiama PIVOT)

 - $H_k = \lambda(a_k^{(k)}, k)$;
 - $A^{(k+1)} = H_k A^{(k)}$

 altrimenti STOP

uscita: $S = H_1^{-1} \cdots H_{n-1}^{-1}$; $D = A^{(n)}$

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. $\quad A^{(1)} = A$

- $k=1, \quad a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0 \; ; \quad H_1 = \lambda\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, 1\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

- $k=2, \quad a_{22}^{(2)} = -2 \neq 0 \; ; \quad H_2 = \lambda\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, 2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$EG(A) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

Oss:
- $A^{(n)}$ è tr sup
- H_k^{-1} è tr inf con 1 sulla diag $(k = 1, \dots, n-1)$

  $\Rightarrow S = H_1^{-1} \cdots H_{n-1}^{-1}$ è tr inf con $s_{kk} = 1$

  Es (per casa): prodotto di matr tr inf con 1 sulla diag è tr inf con 1 sulla diag.

- $A^{(n)} = H_{n-1} \cdots H_1 A \Rightarrow A = H_1^{-1} \cdots H_{n-1}^{-1} A^{(n)} = S D$
- $d_{kk} = a_{kk}^{(k)}$ (k-esimo pivot)

Pb: non sempre EG è def $\left(\text{Es: } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$