

2 SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI

Pb: dati $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibili, $b \in \mathbb{R}^n$
 determinare $x^* \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax^* = b$

Oss: A invertibile significa (proprietà equivalenti):

- $\exists!$ $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c. $AB = BA = I$ (matr. identità, $B = A^{-1}$)
- $\det A \neq 0$
- $\ker A = \{0\}$
- $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
- colonne (righe) di A sono elem. lin. indip. (q. di BASE) di \mathbb{R}^n
- $\forall b \in \mathbb{R}^n, \exists!$ x^* : $Ax^* = b$

• Casi SEMPLICI

(D) A diagonale ($a_{ij} = 0$ per $i \neq j$)

- invertibile $\sim a_{kk} \neq 0, k = 1, \dots, n$
- soluzione: $x_k = b_k / a_{kk}, k = 1, \dots, n$

(T) A triangolare ($a_{ij} = 0$ per $\begin{cases} i > j & \text{tr. SUPERIORE} \\ i < j & \text{tr. INFERIORE} \end{cases}$)

- invertibile $\sim a_{kk} \neq 0, k = 1, \dots, n$
- soluzione: TS) SOSTITUZIONE all'INDIETRO
 TI) SOSTITUZIONE in AVANTI (Es: desc. procedure!)

$x = SI(T, c)$
dati: $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tr. sup. invert, $c \in \mathbb{R}^n$
uscita: $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Tx = c$
 $x_n = c_n / t_{nn}$
 per $k = n-1, \dots, 1$ ritrovi:

- $s_k = c_k - (t_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + t_{k,n}x_n)$
- $x_k = s_k / t_{kk}$

PROCEDURA (FUNZIONE)
 SOSTITUZIONE all'INDI
 (o/ in \mathbb{R})

(O) A ortogonale (ovvero - proprietà equivalenti):

- colonne (righe) sono BASE ORTONORMALI di \mathbb{R}^n , risp. al p.s. canonico
- $A^T A = I$
- $A^{-1} = A^T$

- invertibile sicuramente
- soluzione: $Ax = b \sim A^T Ax = A^T b$
 $\sim x = A^T b$

(P) A di permutazione (le colonne [righe] di A sono una permutaz. di quelle e_1, \dots, e_n della matr. identità; Es: I, J)

Oss: A di permutazione... \Rightarrow A ortogonale
 • $v \in \mathbb{R}^n$, le comp. di $Av \dots$

- invertibile sicuramente
- soluzione: $x^* = A^T b$ (ottenuta permutando le comp. di b!)

Es: $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; determ. P di perm. t.c. $Pv = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

• Caso GENERALE

idea: fattorizzare A con (scrivere A come prodotto di) fattori SEMPLICI...

Es: (1) fattorizzazione LR $S, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

- S tr. inf. con $s_{kk} = 1$ (invert!)
- D tr. sup.
- $SD = A$

Oss: A invert \Leftrightarrow D invert

(2) fattorizz QR

$U, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c.

• U ortogonale (invertibile!)

• T tr sup

• $UT = A$

↓
Oss: A invert $\Leftrightarrow T$ invert

... per (caso della fattorizzazione $A = MN$)

$Ax = b \sim MNx = b$ • cambio variabili: $Nx = c$ ↑ invertibile

• $Mc = b$ (caso semplice) \rightarrow ricavo c

• $Nx = c$ (caso semplice) \rightarrow ricavo x

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è fatt di A ;

• decidere se LR o QR (o nessuna delle due...)

• risolvere il sist $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

Pb: assegnata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determ fatt LR ...

Soluz: tentare usando elim di Gauss

... QR

Soluz: tentare usando procedura di GRAM-SCHMIDT