Problema 3

Sia $h(x) = \frac{1}{9} - 3x^3$.

(a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo ed operando in $\mathbb{R}$ risulta convergente.

- METODO di NEWTON

f derivabile e $f' \neq 0$; è il m. it ad un punto def da

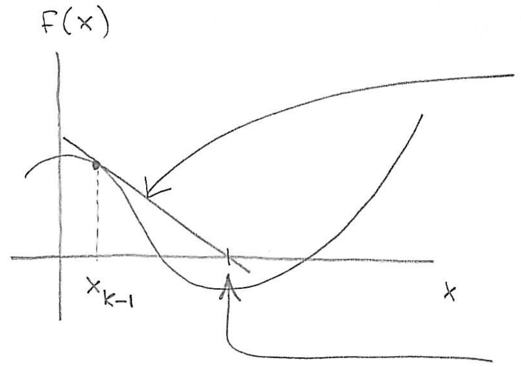
$$\boxed{h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Proprietà:

- $f(x) = 0$ equivalente a $h(x) = x$
- SE $f \in C^2$ e α zero di f ALLORA ordine di conv almeno 2

$\left[\Rightarrow \exists\ [a,b] \text{ che verifica ip teo conv loc} \right]$

- (int geometrica: metodo delle tangenti)



$y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$
(retta tangente al grafico di f in x_{k-1})

x t.c. $f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) = 0$

ovvero $x = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} = h(x_{k-1})$

Oss (scelta di x_0, metodo di Newton):

SE $[a,b]$, $f \in C^2(a,b)$, x_0 t.c.

1) $\exists\ \alpha \in [a,b]$ zero di f
2) $\forall x \in [a,b]$: $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) \neq 0$ ($\Rightarrow \alpha$ unico zero...)
3) $f(x_0) f''(x_0) > 0$

ALLORA: la succ gen dal m di N a partire da x_0

a) è convergente ad α
b) è monotona.

(dim: grafico-cont, caso particolare ...)

Es: $f(x) = x + \log x$; decidere se sia utilizzabile il m di N per approx lo zero di f.

- α zero di f in $[1/2, 1]$
- $f \in C^2\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
- $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ($\Rightarrow$ m di N utilizz!)
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$, succ monotona crescente $\to \alpha$.

Es: $f(x) = e^x + x - 3$

I) determ # zeri e separazione
II) decidere se m it def da $h(x) = 3 - e^x$ utilizz...
III) decidere se m di N utilizz...

Es: $f(x) = 1 - x^2 - x$

(I) determ # zeri e separazione

(II) decidere se m it def da $h(x) = 1 - x^2$ utilizz...

(III) decidere se m di N utilizz...

Es: $f(x) = \operatorname{arctg} x$; decidere se m di N utilizz per approssim lo zero di f $(\alpha = 0)$ e, event, determ x_0 "buono".
