CN 2 3 29 settembre 2011 / B25

Oss: x reale $\neq 0$, β intero ≥ 2 (BASE)

$\exists!\, b \in \mathbb{Z}$ (ESPONENTE) : $g = \dfrac{|x|}{\beta^b} \in [\beta^{-1}, 1)$ (FRAZIONE)

ovvero: $\exists!$ scrittura di x nella forma $x = (-1)^s \beta^b g$

con $s \in \{0,1\}$, $b \in \mathbb{Z}$, $g \in [\beta^{-1}, 1)$.

Oss: la condiz $g \in [\beta^{-1}, 1)$ si traduce così: la scrittura posizionale di g in base β ha la forma $0{,}c_1 c_2 \dots$ con $c_1 \neq 0$.

Es: $x = \frac{1}{10}$, $\beta = 10 \Rightarrow s = 0$, $b = 0$, $g = \frac{1}{10} = 0{,}1$

scrittura posizionale di g in base dieci ("lunghezza 1")

$x = \frac{1}{10}$, $\beta = 2 \Rightarrow s = 0$, $b = -3$, $g = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \boxed{0{,}11001100\dots}$

scrittura posizionale di g in base due ("lungh infinita")

---

def (numeri in v. mobile; precisione)

- β intero ≥ 2, m intero > 0

$$F(\beta, m) = \{0\} \cup \{ x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^s \beta^b \, 0{,}c_1 \dots c_m$$
$$\text{con } s \in \{0,1\},\ b \in \mathbb{Z},$$
$$c_1, \dots, c_m \in \{0, \dots, \beta - 1\},\ c_1 \neq 0 \}$$

scrittura posiz della frazione in base β

"ins dei numeri in virgola mobile e precisione m, in base β"

Es: $F(10, 1) = \mathcal{M}$

- $\frac{1}{100} \in \mathcal{M}$ perché $\frac{1}{100} = 10^{-1}\, 0{,}1$
- $\frac{11}{100} \notin \mathcal{M}$ perché $\frac{11}{100} = 10^0\, 0{,}11$ e la frazione...
- tutti gli elem positivi di $\mathcal{M}$ con esponente zero sono: $\{0{,}1;\ 0{,}2;\ \dots;\ 0{,}9\} = \mathcal{B}$
- tutti gli elem positivi di $\mathcal{M}$ con esponente b sono: $\{10^b\, 0{,}1;\ 10^b\, 0{,}2;\ \dots;\ 10^b\, 0{,}9\} = 10^b \mathcal{B}$

  tutti quelli negativi con esponente b sono:

  $\{-10^b\, 0{,}9;\ -10^b\, 0{,}8;\ \dots;\ -10^b\, 0{,}1\} = (-1)\, 10^b \mathcal{B}$
- $F(10,1) = \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} (-1)\, 10^b \mathcal{B} \ \cup\ \{0\}\ \cup\ \bigcup_{b \in \mathbb{Z}} 10^b \mathcal{B}$

Proprietà di $F(\beta, m) \subset \mathbb{R}$:

- numerabile e ordinato;
- simmetrico rispetto a zero;
- zero è pto di accumulazione;
- $\sup F(\beta, m) = +\infty$, $\inf F(\beta, m) = -\infty$.

Es: 1) determ una succes $\xi_k \in F(\beta, m)$ t.c. $\lim_{k \to \infty} \xi_k = 0$ (Sol: $\xi_k = \beta^{-k}\, 0{,}1$)

2) ... t.c. $\lim_{k \to \infty} \xi_k = +\infty$ (Sol: $\xi_k = \beta^k\, 0{,}1$)

3) decidere se $\frac{7}{8} \in F(2,2)$

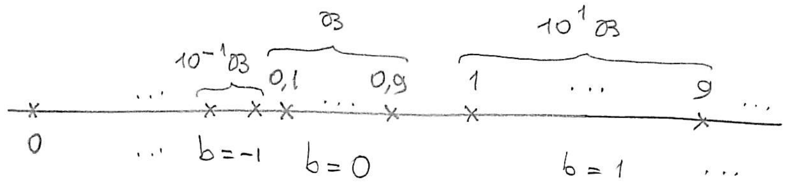
Sol: (a) determ esp e fraz in base due: $b = 0$, $g = 7/8$

(b) decidere se la fraz è compatibile con la precisione: non compatibile $\Rightarrow 7/8 \notin F(2,2)$.

Oss (struttura geometrica di $F(\beta,m)$)

- **Es**: $F(10,1)$, $\mathcal{B} = \{0,1;\ 0,2;\ \dots;\ 0,9\}$

elem positivi:



$$\boxed{\textbf{Oss}:\ b \in \mathbb{Z};\ \max\{10^{b}\mathcal{B}\} < \min\{10^{b+1}\mathcal{B}\}}$$

- **def** (f. successore, predecessore)

$\xi \begin{cases} \in F(\beta,m) \\ \neq 0 \end{cases}$; $\sigma(\xi) =$ "il primo ndm $> \xi$"
SUCCESSORE di ξ

$\pi(\xi) =$ "il primo ndm $< \xi$"
PREDECESSORE di ξ

Oss: $\sigma;\ \pi\ :\ F(\beta,m)\setminus\{0\} \longrightarrow F(\beta,m)\setminus\{0\}$

e $\boxed{\pi = \sigma^{-1}}$

Es: $F(10,3)$. Determ: $\sigma(10^{-2}\,0{,}501)$, $\pi(10^{-2}\,0{,}501)$
$\sigma(10^{4}\,0{,}100)$, $\pi(10^{4}\,0{,}100)$

- (per casa): $F(2,3)$. Determ: $\sigma(2^{-3}\,0{,}101)$, $\pi(2^{-3}\,0{,}101)$, $\sigma(2^{-3}\,0{,}100)$, $\pi(2^{-3}\,0{,}100)$; $\pi(-2^{-1}\,0{,}110)$, $\sigma(2^{-1}\,0{,}110)$ e verificare che $\pi(-2^{-1}\,0{,}110) = -\sigma(2^{-1}\,0{,}110)$

(come mai?)

- **TEO** (distribuzione degli elem di $F(\beta,m)$)

$\xi = \beta^{b} g \begin{cases} \in F(\beta,m) \\ > 0 \end{cases}$

Allora: $\dfrac{\sigma(\xi) - \xi}{\beta^{b}} = \beta^{-m}$ (indip da ξ !!)

(**dim**: ...)