Es (fatt QR, caso rettangolare):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$; fatt QR di A è (U,T) t.c.

- $U \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ a colonne ortonormali risp ps canonico in $\mathbb{R}^3$
- $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tr sup
- $A = UT$

Si determina come nel caso quadrato...:

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix}$$

Oss: $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ a colonne lin indip, $b \in \mathbb{R}^n$; U, T fatt QR di A.

- colonne di A lin indip $\Rightarrow$ T invertibile (dim: per ass.)
- eq normali per il sist $Ax = b$:

$$\begin{cases} A^TA = T^TU^TUT = T^TT \\ A^Tb = T^TU^Tb \end{cases} \qquad T^TTx = T^TU^Tb$$

MA T^T invertibile $\Rightarrow$ $\boxed{Tx = U^Tb}$

- si ha: $\mu_2(A^TA) = (\mu_2(T))^2$ [dim: no]

OVVERO: i sist $A^TAx = A^Tb$ (eq normali) e $Tx = U^Tb$ sono equivalenti, ma la matrice del secondo (è triangolare ed) ha numero di condizionam (quasi) sempre minore del primo!

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; utilizz fatt QR di A per determ soluz di $Ax=b$ nel senso dei mq

Sol: eq. normali $\sim$ $Tx = U^Tb$

- $$U^Tb = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \rightarrow x_2 = 2/3, \quad x_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}/3}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Es: $P_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_3 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

determ x che rende min $F(x_1, x_2) = d(x,P_1)^2 + d(x,P_2)^2 + d(x,P_3)^2$

Sol: ... $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

- int fisica: config di equilibrio di un pto mobile nel piano collegato da molle con P_1, P_2, P_3 ...