Oss (pseudoinversa):

$A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $n \geq k$, $b \in \mathbb{R}^n$

$= (a_1,\dots,a_k)$, colonne lin indip.

- LA soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei m.q. è

$$x^* = \boxed{(A^TA)^{-1}A^T} b \quad \longleftarrow \text{PSEUDOINVERSA di } A \; (A^+) \in \mathbb{R}^{k\times n}$$

- SE $n = k$ si ha $A^+ = A^{-1}$
- LA proiez ortogonale di b su $\langle a_1,\dots,a_k\rangle$ è $Ax^* = AA^+b$

Es: $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$, $v = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ (ps canonico in V)

- W è un piano: determ eq cartesiana;
- determ v^*, proiez ortogonale di v su W;
- posto $A = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$, determ A^+.

Sol:
- si cercano gli $x \in \mathbb{R}^3$ t.c. i vett $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, x$ sono lin dip

ovvero t.c. $\det \begin{bmatrix}1&0&x_1\\1&1&x_2\\0&1&x_3\end{bmatrix} = 0$

Poiché
$$\begin{bmatrix}1&0&x_1\\1&1&x_2\\0&1&x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&x_1\\0&1&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_2+x_1\end{bmatrix} \quad \text{(fatt LR determ con EG)}$$
si ha: $\boxed{x_3 - x_2 + x_1 = 0}$

- Le coord di v^* risp a $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ si determinano come soluz nel senso dei min quadr del sist:

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

ovvero come soluz delle eq.ni normali: $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,

sist. equivalente: $\begin{bmatrix}2&1\\0&-3\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \rightarrow x = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow v^* = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

- $A^TA = \begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\1/2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&3/2\end{bmatrix}$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix}1/2&-1/3\\0&2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1/2&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/3&-1/3\\-1/3&2/3\end{bmatrix}$$

$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix}2/3&1/3&-1/3\\-1/3&1/3&2/3\end{bmatrix}; \quad A^+b = \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\end{pmatrix}, \text{ come doveva}$$

---

def (funz che meglio approssima i dati nel senso dei m.q.)

dati: $(x_0,y_0),\dots,(x_k,y_k)$, G s.s.v di $C([a,b],\mathbb{R})$ di dim finita;

$g \in G$ è un elem di G che meglio approssima i dati nel senso dei m.q se:
$$\forall \tilde g \in G, \quad (\tilde g(x_0)-y_0)^2+\dots+(\tilde g(x_k)-y_k)^2 \geq (g(x_0)-y_0)^2+\dots+(g(x_k)-y_k)^2$$

Es: determ gli elem di $P_1(\mathbb{R})$ che meglio approssimano i dati $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,1)$ nel senso dei m.q.

Sol: $P_1(\mathbb{R}) = \langle 1, x\rangle$; $p(x) = a_0 + a_1x$

$$(p(-1)-0)^2 + (p(0)-0)^2 + (p(1)-1)^2 = \left\| \begin{bmatrix}p(-1)\\p(0)\\p(1)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\|^2 =$$

(norma ottenuta da ps canonico in $\mathbb{R}^3$)

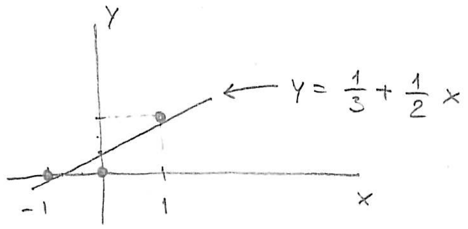
$$= \left\| \begin{bmatrix}a_0+a_1(-1)\\a_0+a_1(0)\\a_0+a_1(1)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| a_0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + a_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\|^2$$

ovvero, posto $A = \begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$: $= \left\| A\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix} - b \right\|^2$

I coeff a_0, a_1 che individuano gli elem di $P_1(\mathbb{R})$ cercati sono q. t. le soluz del sist $Ax = b$ nel senso dei min quadr.

Si ottiene: $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_0 = 1/3 \;,\; a_1 = 1/2$

e l'unico elem che soddisfa le richieste è $\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x}$



Es: determ gli elem di $P_2(\mathbb{R})$ che meglio approssimano i dati

$(-1,0)\,,\ (0,0)\,,\ (1,1)$

nel senso dei min quadr.